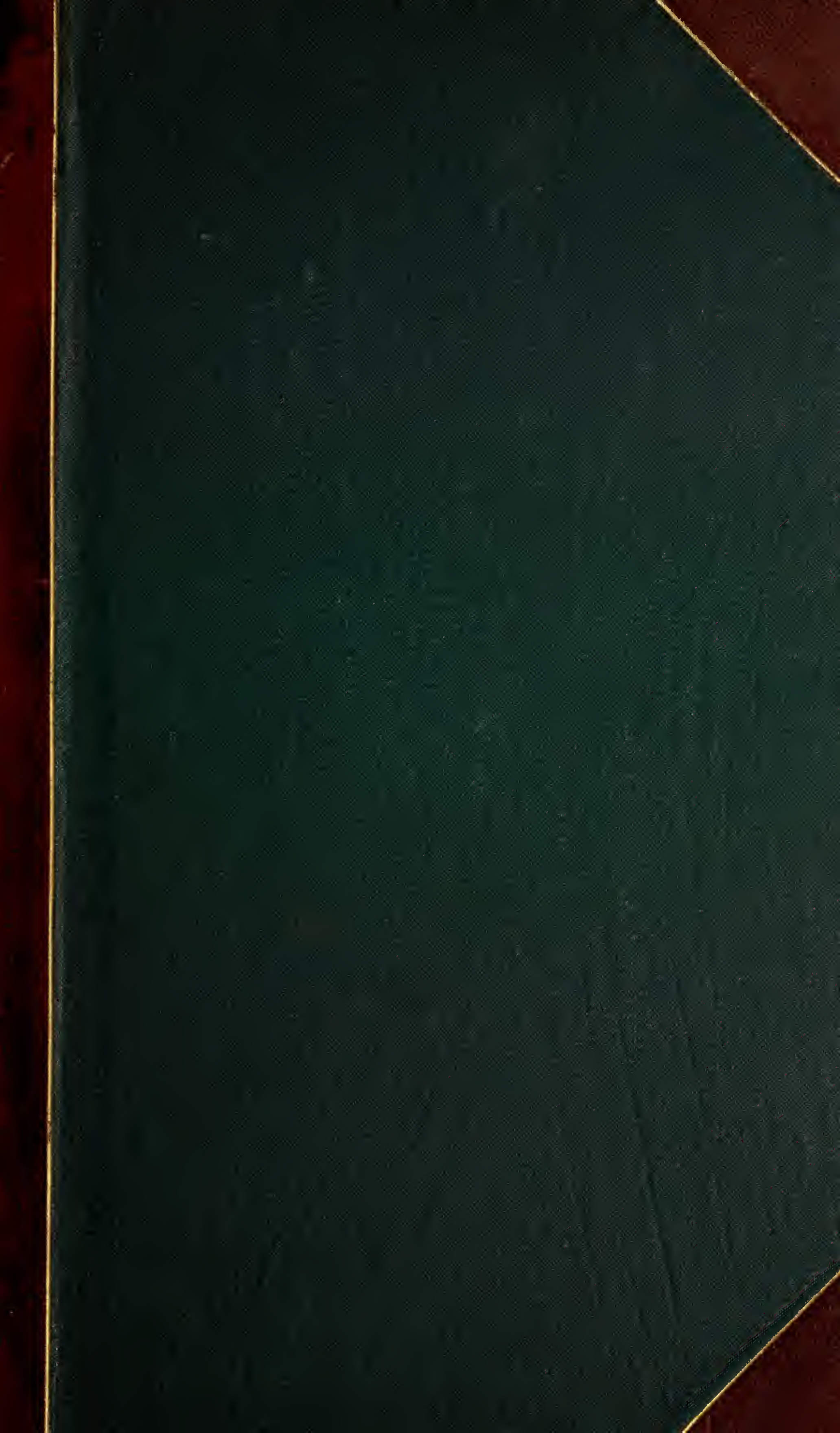
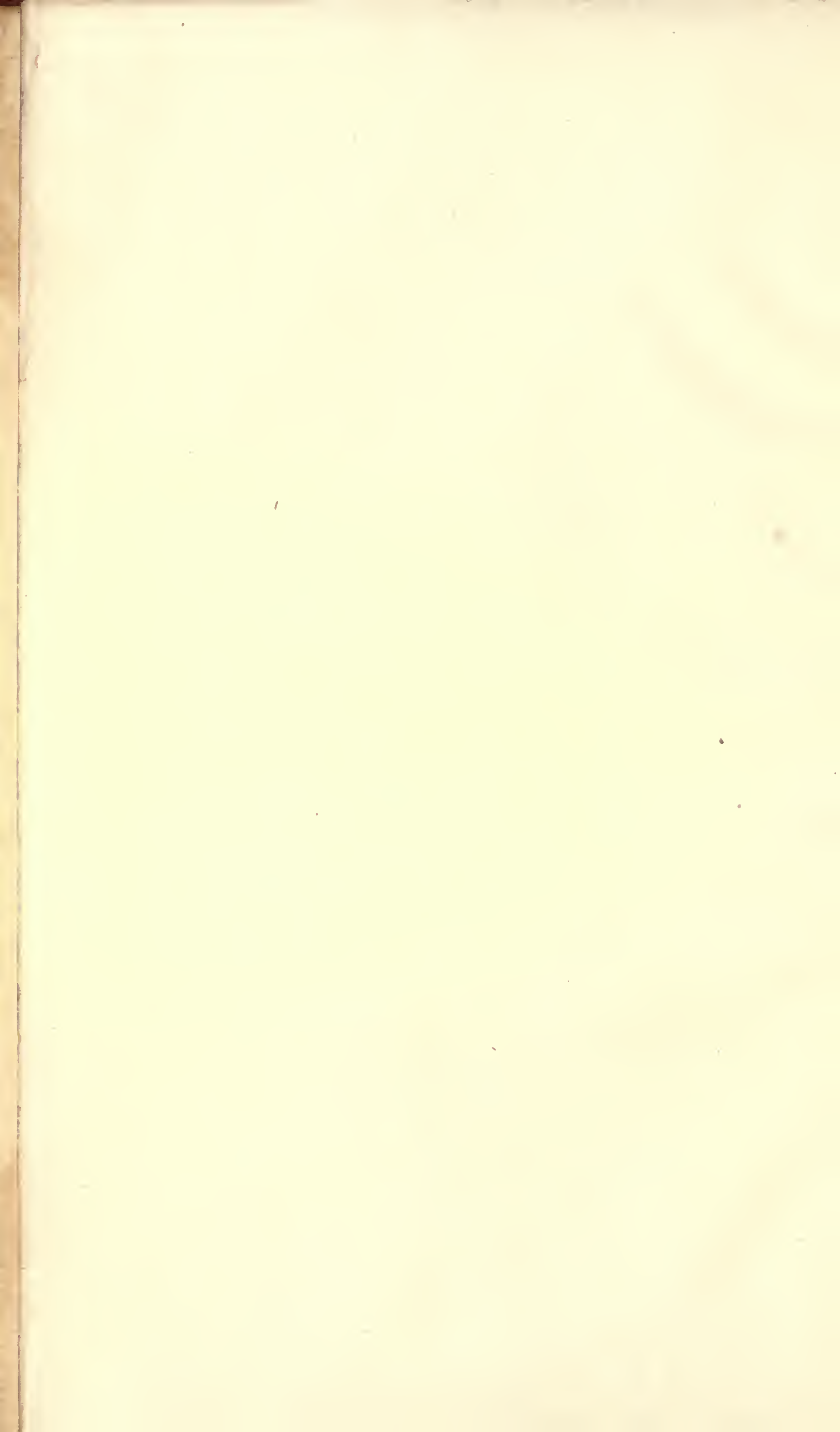



SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS
Mathematics Dept.













DIE GEOMETRIE DER LAGE.



DIE

GEOMETRIE DER LAGE.

VORTRÄGE

VON

DR. THEODOR REYE,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG.

ZWEITE ABTHEILUNG.

MIT EINER AUFGABEN-SAMMLUNG UND EINER LITH. FIGUREN-TAFEL.

ZWEITE VERMEHRTE AUFLAGE.

HANNOVER.

CARL RÜMPLER.

1880.

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorwort zur zweiten Abtheilung.

. . . .

. . . .

Der Lehrgang dieses zweiten Theiles wurde durch ähnliche Erwägungen vorgezeichnet, wie derjenige des ersten. Zunächst werden die einfachsten Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter und dritter Stufe aufgestellt, und sodann der Reihe nach die neuen räumlichen Gebilde untersucht, welche von jenen Grundgebilden erzeugt werden. Unter diesen Erzeugnissen befinden sich gewisse Strahlengebilde, welche bisher von den Geometern wenig oder gar nicht beachtet worden sind. Das Studium derselben schien mir von Nutzen zu sein für die weitere Ausbildung der Geometrie der Lage, und führte zu mehreren nicht uninteressanten Reihen neuer Sätze.

Wie bei von Staudt bildet die Lehre von der Collineation und der Reciprocität die Grundlage für alles Folgende, zunächst für die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. Doch definire ich diese Flächen nicht, wie von Staudt[1]), als Ordnungsflächen räumlicher Polarsysteme, sondern mit Seydewitz[2]) unmittelbar als Erzeugnisse reciproker Strahlenbündel, weil sie so dem Vorstellungsvermögen leichter zugänglich werden. Freilich sah ich mich dabei genöthigt, für manche Eigenschaften jener Flächen neue Beweise aufzusuchen. Die Lehre von der Affinität und Aehnlichkeit glaubte ich weiter ausführen zu müssen, als in den mir bekannten Werken über synthetische Geometrie geschehen ist. Manche von den schönen

---

[1]) von Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Seite 196.

[2]) Seydewitz in Grunert's Archiv für Math. u. Phys. Bd. 9, Seite 158.

Sätzen, mit welchen uns der Schöpfer dieser Lehre, Herr Moebius, in seinem barycentrischen Calcul bereichert hat, dürften wohl hier zuerst ohne Rechnung bewiesen sein. Die ebenen und räumlichen Polarsysteme werden auch dem Anfänger keine grossen Schwierigkeiten mehr bieten, da sie ihm schon durch die Polarität der Curven und Flächen zweiter Ordnung bekannt werden. Im Nullsysteme bilden nach Herrn Plücker's Bezeichnung[1]) die sämmtlichen Leitstrahlen einen „linearen Strahlencomplex".

Die letzten dreizehn Vorträge und die zweite Hälfte der Aufgaben und Lehrsätze betreffen fast ausschliesslich Gegenstände, die erst seit etwa zehn Jahren von den Geometern eingehend untersucht werden. Die Eigenthumsrechte jedes einzelnen Autors dürften hier noch nicht so allgemein bekannt sein, wie bei den vorhergehenden Vorträgen. Ich halte es deshalb für meine Pflicht, überall die einschlagende Literatur sorgfältig anzugeben, soweit sie mir zugänglich war, um so mehr, da ich unmöglich bei den einzelnen Sätzen jedesmal den Entdecker angeben kann. Aus den literarischen Erscheinungen der letzten Monate habe ich übrigens nur für die Aufgabensammlung hie und da Nutzen ziehen können, da das gesammte übrige Manuscript schon im Mai in den Händen meines Herrn Verlegers sich befand.

Von den Raumcurven dritter Ordnung sind mehrere Eigenschaften schon lange bekannt. So beweist Herr Moebius schon 1827 im barycentrischen Calcul (Seite 120), dass die Tangentenfläche dieser Curve von ihren Schmiegungs-Ebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten wird; Herr Chasles[2]) stellt bereits 1837 den Satz auf, dass diese Fläche von der vierten Ordnung ist; Herr Cayley[3]) zeigt 1845, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Sehne der Curve hindurchgeht. Zwei Jahre später beweist Seydewitz[4]), dass diese Raumcurve von zwei collinearen Strahlenbündeln erzeugt wird, und entdeckt zugleich viele ihrer Eigenschaften. — Von späteren Autoren wird die Curve gewöhnlich als partieller Schnitt geradliniger Flächen zweiter Ordnung definirt;

[1]) Plücker in den Philosophical Transactions, 1865.
[2]) Chasles, Aperçu historique, Note 33.
[3]) Cayley in Liouville, Journal de Math., T. 10.
[4]) Seydewitz in Grunert's Archiv f. Math. u. Phys., Bd. 10, Seite 203.

ich habe jedoch die Seydewitz'sche Erzeugungsart vorgezogen, weil sie uns sofort alle eigentlichen und uneigentlichen Sehnen der Raumcurve liefert. Auch ergeben sich mit ihrer Hülfe äusserst einfach alle von Herrn Chasles[1]) ohne Beweis aufgestellten Sätze, welche die Herren Schröter[2]), Cremona[3]) und v. Staudt[4]) seither bewiesen haben, und die in meinen zehnten und eilften Vortrag[5]) eingeflochten sind. Die Theorie der conjugirten Punkte und Ebenen in Bezug auf die Raumcurve dritter Ordnung ist den Herren Cremona[6]) und von Staudt[7]) zu danken; ich hatte hier einige Schwierigkeiten zu überwinden in Betreff der uneigentlichen Sehnen.

Neu ist, wie ich glaube, der Inhalt des dreizehnten[8]) Vortrages bis auf einzelne, in anderer Art schon bewiesene Sätze über die Raumcurve dritter Ordnung. Die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades habe ich in grösserer Ausführlichkeit und mit anderer Begründung schon in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XI bearbeitet. — Die in einander liegenden collinearen Systeme hätten auch vor den Raumcurven dritter Ordnung erledigt werden können; jedenfalls aber wird die Anzahl ihrer entsprechend gemeinschaftlichen Elemente am Leichtesten mittelst jener Raumcurven gefunden. Die Sätze über involutorische Systeme verdanken wir von Staudt[9]); über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, welches bei dem geschaart-involutorischen Systeme vorkommt, und welches auch Herr Hermes[10]) kürzlich, und zwar analytisch untersucht hat, gebe ich in der Aufgabensammlung mehrere neue Sätze.

---

[1]) Chasles in den Comptes rendus 1857 oder in Liouv. Journ. de Math., 1857, Seite 397.

[2]) Schröter im Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 56, Seite 27.

[3]) Cremona, ebenda Bd 58, Seite 138 und Bd. 60, Seite 188.

[4]) von Staudt, Beiträge zur Geom. d. Lage, Nürnberg 1860, Seite 298.

[5]) [des zwölften und dreizehnten der zweiten Auflage].

[6]) Cremona in den Annali di Matematica T. I und II (Roma 1858 und 1859), und in den Nouv. Annales de Math. 2e série, T. 1, 1861.

[7]) von Staudt, Beitr. z. Geom. d. Lage, 1860, Seite 321.

[8]) [des fünfzehnten der zweiten Auflage].

[9]) von Staudt, Geom. d. Lage (1847), Seite 129 und Beitr. z. G. d. L. (1856), Seite 63.

[10]) Hermes im Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 67, Seite 153 (1867).

Als mein Eigenthum glaube ich auch den grössten Theil der Vorträge 15 bis 20[1]) ansprechen zu dürfen, vor Allem die Lehre von den Strahlencomplexen, welche durch collineare räumliche Systeme erzeugt werden. Diese Strahlencomplexe können wir mit Herrn Plücker (a. a. O. Seite 779) „Complexe zweiten Grades“ nennen. Von grossem Nutzen zeigte sich bei dem Studium derselben die vorher erledigte Untersuchung der Sehnen- und Axensysteme von Raumcurven dritter Ordnung; wie denn überhaupt der Ausspruch von Staudt's sich immer wieder bestätigt, dass diese Curven für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung haben, wie die Kegelschnitte für diejenige der Ebene. Jene Strahlencomplexe liefern mir von den Flächenbüscheln zweiter Ordnung, welche bisher der synthetischen Geometrie schwer zugänglich waren, die Haupt-Eigenschaften, namentlich auch deren projectivische Beziehungen. Ferner stellt sich heraus, dass die Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, einen solchen Strahlencomplex bilden, und wir erhalten dadurch vollständigen Aufschluss über die hier zuerst untersuchte Vertheilung dieser Axen im Raume. Daran schliesst sich die Lehre von den homothetischen und den confocalen Flächen zweiter Ordnung, und namentlich ergeben sich über die Normalen dieser Flächen und ihre Fusspunkte viele neue Sätze. Für confocale Flächen habe ich einen Theil dieser Sätze schon in meinem „Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten“[2]) veröffentlicht; mehrere derselben sind schon früher von Steiner[3]), Joachimsthal[4]) und Herrn Clebsch[5]) bewiesen worden.[6])

Die letzten drei Vorträge[7]) handeln von den Flächen dritter Ordnung, welche schon vorher wiederholt sich uns aufdrängten. Da gerade jetzt die Geometer sich lebhaft mit diesen Flächen

---

[1]) [18 bis 23 der zweiten Auflage.]

[2]) Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. X, Seite 453.

[3]) Steiner im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 49, Seite 346.

[4]) Joachimsthal, ebenda Bd. 59, Seite 111.

[5]) Clebsch, ebenda Bd. 62, Seite 64.

[6]) [Chasles giebt schon 1837 in seinem „Aperçu historique des Méthodes en Géométrie“ Note XXXI einige dieser Sätze, jedoch ohne Beweis.]

[7]) [24 bis 26 der zweiten Auflage.]

beschäftigen, so dürfte das folgende Verzeichniss der sie betreffenden Literatur[1]) von allgemeinem Interesse sein:

Cayley im Cambridge and Dublin Mathem. Journal, vol. IV, Seite 118.

Salmon, ebenda vol. IV, Seite 252 und Philos. Transactions 1860, Seite 229.

Sylvester, ebenda vol. VI, Seite 198 und Comptes rendus 1861, I, Seite 977.

Brioschi in Tortolini, Annali di Matematica, 1855.

Hesse im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 49, Seite 279.

Grassmann, ebenda Bd. 49, Seite 59.

Steiner, ebenda Bd. 53, Seite 133.

Schläfli im Quarterly Journal of Math., vol. II, Seite 56—65 und 110—120.

August, Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis (diss. inaug. Berolini 1862).

Clebsch im Journal f. d. r. u. a. Math., 1861 bis 1866, Bd. 58, 59, 63, 65.

Schröter, ebenda Bd. 62, Seite 265.

Salmon, Geometry of three dimensions; deutsch von Fiedler. Bd. II, Seite 412.

Schläfli in den Philos. Transactions 1863, Seite 193.

Sturm, Synthet. Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867.

In den meisten dieser Abhandlungen werden die Beweise durch Rechnung geführt; nur die Herren Schröter und Sturm benutzen fast ausschliesslich die Hülfsmittel der synthetischen Geometrie, indem sie der analytischen nur einzelne Sätze entlehnen. Die inhaltsreiche Abhandlung Steiner's giebt bekanntlich viele Hauptsätze über die Flächen dritter Ordnung und ihre 27 Geraden, jedoch ohne Beweis. Das Sturm'sche Werk konnte ich bei der Ausarbeitung meiner Vorträge nicht mehr zu Rathe ziehen, da es erst seit zwei Wochen in meinen Händen ist.

---

[1]) [Fast zugleich mit der ersten Auflage dieses Buches erschien Cremona's „Mémoire sur les Surfaces de troisième ordre“ in dem Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 68.]

Nachdem schon früher (Seite 145) die zweite Steiner'sche Erzeugungsart der Fläche kurz besprochen wurde, gehe ich im 21. [jetzt 24.] Vortrage aus von der Erzeugungsart Grassmann's, von welcher die vierte Steiner'sche ein besonderer Fall ist, d. h. ich betrachte wie Herr Schröter die Fläche dritter Ordnung als Erzeugniss von drei collinearen Strahlenbündeln. Ohne Weiteres gelange ich so zu der bekannten Abbildung der Fläche auf einer Ebene, welche namentlich Herr Clebsch (a. a. O. Bd. 65) eingehend discutirt hat, sowie zu zwei, der Fläche angehörenden Systemen von Raumcurven dritter Ordnung. Eine sofort sich ergebende, höchst einfache Construction der Fläche aus zwei dieser Raumcurven scheint bisher unbemerkt geblieben zu sein. Ich beweise u. A. auch, dass jeder beliebige Punkt der Fläche zum Mittelpunkte von einem der drei erzeugenden Strahlenbündel gewählt werden kann, und dass seine erste Polare hinsichtlich der Fläche eine Fläche zweiter Ordnung sein muss.

Dem Nachweise der 27 auf der Fläche liegenden Geraden musste eine Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung nothwendig vorangeschickt werden, wenn ich nicht mit Herrn Schröter und Sturm aus der analytischen Geometrie die folgenden Hauptsätze als bekannt voraussetzen wollte: „Durch neun beliebige Punkte der Ebene lässt sich im Allgemeinen nur eine Curve dritter Ordnung legen; und zwei Curven dritter Ordnung schneiden einander in höchstens neun Punkten.“ Synthetisch sind meines Wissens diese Sätze noch nirgends bewiesen, wenngleich auch Herr Chasles[1]) sie seiner Abhandlung über jene Curven zu Grunde legt. Nach vieler vergeblicher Mühe ist mir dieser Beweis endlich gelungen; auf ihn hauptsächlich gründet sich die Theorie und Construction jener Curven.

Die Lehre von den 27 Geraden unserer Fläche ergiebt sich dann leicht aus ihrer Abbildung; ich habe neben den Steiner'schen Sätzen auch diejenigen über Herrn Schläfli's Doppelsechse entwickelt. Ueberhaupt ist fast Alles, was Steiner von der Fläche dritter Ordnung ausgesagt hat, im letzten Vortrage bewiesen worden, mit Ausnahme der Sätze aus der Polarentheorie. Auf die

---

[1]) Chasles in den Comptes rendus, T. 41, Seite 1190 (1855).

Untersuchungen des Herrn Schläfli über die Realität der 27 Geraden bin ich nicht eingetreten; ebenso habe ich mich hinsichtlich der Knotenpunkte, die in besonderen Fällen auftreten können, auf Andeutungen beschränkt.

Zur Uebung für Studirende habe ich dem Buche 230 Aufgaben und Lehrsätze beigefügt, jedoch nur solche, deren Auflösung oder Beweis sich ohne grosse Schwierigkeit aus den vorgetragenen Lehren ergiebt. Jedem Anfänger rathe ich dringend, die Constructions-Aufgaben wirklich auszuführen, weil das Verständniss der Geometrie der Lage durch das Zeichnen wesentlich erleichtert wird. Die Sammlung enthält viele nützliche Theoreme, welche zum Theil metrische Relationen betreffen. In die zweite Hälfte habe ich vorzugsweise solche Sätze aufgenommen, die mir als Ausgangspunkte neuer Theorien geeignet schienen, den Aufänger zu selbständiger Forschung anzuregen. Man findet hier u. A. die Sätze über die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung, über die Focalstrahlen von Kegelflächen zweiter Ordnung, über das Princip der reciproken Radien, und namentlich diejenigen über den Flächenbündel und das Flächengebüsch zweiter Ordnung.

Diese Flächengebilde zweiter Ordnung habe ich in die Aufgabensammlung verwiesen, weil ich mir hier eine kürzere Beweisführung gestatten und mich häufig auf Andeutungen des Beweises beschränken durfte. Die von mir benutzte Beziehung zwischen dem Flächengebüsche und einem räumlichen Systeme hat bereits Herr Berner[1]) aufgestellt; sie lässt sich auch bei Flächengebüschen $n$ter Ordnung unmittelbar anwenden, und dürfte sich auch bei diesen als fruchtbar erweisen. In sehr einfacher Weise führt sie mich auf die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, welche vor vier Jahren zuerst von den Herren Kummer, Weierstrass, Schröter[2]), Cremona[3]) und Cayley[4]) untersucht wurde. Die Abbildung dieser Fläche auf einer Ebene,

---

[1]) Berner, De transformatione secundi ordinis cet. Diss. inauguralis. Berolini 1865.

[2]) Kummer, Weierstrass und Schröter in den Berliner Monatsberichten 1863 oder im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 64, Seite 66, 70.

[3]) Cremona im Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 63, Seite 315.

[4]) Cayley, ebenda Bd. 64, Seite 172.

welche kürzlich von den Herren Clebsch[1]) und Cremona[2]) aus schon bekannten Gleichungen oder Eigenschaften der Fläche abgeleitet wurde, ergiebt sich mir unmittelbar, und auf sie gründe ich die Theorie der Steiner'schen Fläche. Ebenso direct gelange ich zu der windschiefen Fläche dritter Ordnung und zu mehreren Flächen vierter Ordnung, welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten und von Herrn Kummer (a. a. O.) zuerst erörtert worden sind.

Und so wünsche ich denn dem zweiten Theile meines Buches dieselbe günstige Aufnahme, welche der erste Theil gefunden hat. Mögen meine Vorträge mit dazu beitragen, dass der synthetischen Geometrie immer neue Freunde gewonnen werden, und dass das Interesse für diese bedeutende Schöpfung unseres Jahrhunderts immer weitere Kreise durchdringe.

Zürich, den 5. October 1867.

Der Verfasser.

---

[1]) Clebsch, ebenda Bd. 67, Seite 1 (1867).

[2]) Cremona in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo vol. IV (1867).

Vorwort zur zweiten Auflage der zweiten Abtheilung.

Die zweite Auflage enthält sieben Vorträge mehr als die erste. Von mehreren der neuen Vorträge 10, 11 und 27 bis 30 über den linearen Strahlencomplex, das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, den F^2-Bündel, das F^2-Gebüsch und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung bilden die gleichnamigen Abschnitte im Anhange der ersten Auflage den Kern. Ganz oder theilweise umgearbeitet sind ferner die Vorträge 12, 15, 16, 18 bis 20 und 23, und die meisten übrigen sind durch Zusätze erweitert. Im Anhange ist ein Abschnitt über Büschel, Bündel und Gebüsche linearer Strahlencomplexe neu hinzugekommen; einige seiner früheren Abschnitte haben in der ersten Abtheilung dieses Buches einen passenderen Platz gefunden.

Von der ersten Auflage hat vor zwei Jahren der Universitäts-Professor Antonio Favaro in Padua ohne mein Wissen eine Italienische Bearbeitung herausgegeben, von welcher ich erst durch eine kürzlich erschienene Französische Uebersetzung[1]) Kenntniss erhielt. Herr Favaro hat es nicht für passend gehalten, meinen Namen im Titel seines Buches zu erwähnen; die versteckte Art und Weise, wie er meine „Geometrie der Lage“ in der Vorrede und sonst citirt, und seine Paragraphen-Eintheilung scheinen vielmehr darauf berechnet zu sein, den wahren Sachverhalt zu verdunkeln. Nach sorgfältiger Durchsicht der Französischen Uebersetzung constatire ich deshalb, dass abgesehen von der Vorrede,

---

[1]) Leçons de Statique graphique, par Antonio Favaro; traduites de l'Italien par Paul Terrier. Première partie: Géométrie de Position. Paris (Gauthier-Villars) 1879, in gr. 8.

den Literaturangaben und den geschichtlichen Anmerkungen Favaro's ungefähr neun Zehntel seines Buches aus meinem Buche übersetzt sind, und zwar meistens Satz für Satz, jedoch die ersten Capitel mehr auszugsweise und mit Umstellung der Sätze. Nur an fünf Stellen habe ich grössere Zusätze von zwei bis sechs Seiten Länge bemerkt; von verschiedenen derselben aber kann ich nachweisen, dass sie aus Schröter-Steiner's Vorlesungen und Cremona's Geometria descriptiva abgeschrieben sind. Die eigenen kleinen Zuthaten Favaro's im Texte sind unbedeutend; von seinen 77 Figuren sind 65 aus meiner „Geometrie der Lage" copirt. — Die Französische Uebersetzung geht bis Seite 88 der zweiten Abtheilung meines Buches, 1. Auflage; sie enthält verschiedene Sätze, welche ich der ersten Abtheilung erst 1877 in der zweiten Auflage hinzugefügt habe.

Hätte Herr Favaro die Erlaubniss zur Uebersetzung meines Buches nachgesucht, so würde ich sie ihm bereitwillig ertheilt haben. Er hat es vorgezogen, ohne Erlaubniss sich anzueignen, was ihm nicht gehört.

Strassburg i. E., den 29. Juli 1879.

Der Verfasser.

Druckfehler.

Seite 21, Zeile 7 v. u. statt „Art so" lies „Art reciprok so".

Inhalts-Verzeichniss.

Anhang.

Erster Vortrag.

Collineare und reciproke Verwandtschaft von Grundgebilden zweiter Stufe.

In analoger Weise wie die einförmigen Grundgebilde können wir auch ebene Systeme und Strahlenbündel auf einander beziehen. Namentlich können wir unsere Betrachtungen über die perspectivische Lage einförmiger Grundgebilde hier bei den Grundgebilden der zweiten Stufe wiederholen. Wir nennen nämlich perspectivisch:

1) ein ebenes System und einen Strahlenbündel, wenn das erstere ein Schnitt des letzteren und umgekehrt dieser ein Schein von jenem ist;
2) zwei ebene Systeme, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind;
3) zwei Strahlenbündel, wenn sie Scheine eines und desselben ebenen Systems sind.

Der Schein, den eine ebene Landschaft in Ihr Auge wirft, ist demnach ein zu der Landschaft perspectivischer Strahlenbündel. Denken Sie sich diesen Schein durch eine neue Ebene aufgefangen oder geschnitten, so erhalten Sie ein perspectivisches Bild der Landschaft, oder ein zweites ebenes System, welches zu demjenigen der Landschaft perspectivische Lage hat. Nach zwei verschiedenen Punkten endlich wirft die Landschaft zwei Scheine, welche offenbar zwei perspectivische Strahlenbündel sind.

Wenn wir nun in einer Reihe von Grundgebilden der zweiten Stufe jedes auf das folgende perspectivisch beziehen, so wird, ähnlich wie bei den einförmigen Grundgebilden, auch das erste auf das letzte bezogen sein, indem jedem Elemente des einen ein bestimmtes Element des andern entspricht; aber sie werden im Allgemeinen nicht perspectivisch liegen. Werden ferner zwei Grundgebilde zweiter Stufe, z. B. zwei ebene Systeme, perspectivisch

auf einander bezogen, und wird hernach das eine verschoben gegen das andere, so bleiben sie auf einander bezogen, verlieren jedoch ihre perspectivische Lage. Allein sie stehen immerhin noch in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander, welche Möbius mit dem Namen der collinearen Verwandtschaft belegt hat. Nämlich in zwei so auf einander bezogenen ebenen Systemen z. B. entspricht jedem geraden Gebilde wieder ein gerades Gebilde, jedem Strahlenbüschel ein Strahlenbüschel, jeder Curve mit ihren Tangenten wieder eine Curve mit ihren Tangenten, jedem $n$eck ein $n$eck u. s. w. Wir nennen hiernach collinear verwandt, oder kürzer collinear:

1) zwei ebene Systeme Σ und Σ_1, wenn jedem Punkte P von Σ ein Punkt P_1 von Σ_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ eine durch P_1 gehende Gerade g_1 von Σ_1;

2) ein ebenes System Σ und einen Strahlenbündel S_1, wenn jedem Punkt P von Σ ein Strahl p_1 von S_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ eine durch p_1 gehende Ebene γ_1 von S_1;

3) zwei Strahlenbündel S und S_1, wenn jedem Strahle p von S ein Strahl p_1 von S_1 entspricht, und jeder durch p gehenden Ebene γ von S eine durch p_1 gehende Ebene γ_1 von S_1;

und wenn ausserdem jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen entspricht.

Kürzer, und dann auch auf räumliche Systeme anwendbar, können wir mit v. Staudt diese Erklärung offenbar so aussprechen:

Zwei auf einander bezogene Grundgebilde der zweiten oder der dritten Stufe heissen collinear, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P *und* g *des einen, von welchen* P *in* g *liegt, resp. zwei ungleichartige Elemente* P_1 *und* g_1 *des andern zugewiesen sind, von welchen auch* P_1 *in* g_1 *liegt.*

Es folgt aus diesen Definitionen sofort:

Perspectivische Grundgebilde der zweiten Stufe sind collinear. Wenn zwei Grundgebilde einem dritten collinear sind, so sind sie auch einander collinear.

Damit ist zugleich bewiesen, dass in einer Reihe von Grundgebilden der zweiten Stufe, von denen jedes zum folgenden per-

spectivisch liegt, je zwei collinear sind, also namentlich auch das erste und das letzte.

Die Bezeichnung collinear hat Möbius in seinem ausgezeichneten Werke „Der barycentrische Calcul" zunächst für ebene Systeme gewählt, die in der angegebenen Weise auf einander bezogen sind; und zwar soll dieser Ausdruck andeuten, dass nicht nur jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des andern, sondern auch jeder geraden Linie wieder eine gerade Linie entspricht. Wir können nämlich zwei ebene Systeme auch z. B. so auf einander beziehen, dass wohl jedem Punkte des einen wieder ein Punkt des andern, dagegen jeder Geraden ein Kegelschnitt entspricht.

Das bereits früher aufgestellte, aber noch nicht allgemein bewiesene Gesetz der Reciprocität oder Dualität führt uns noch zu einer zweiten einfachen Verwandtschaft zwischen Grundgebilden höherer Stufe, zu der sogenannten Verwandtschaft der Reciprocität. Wir nennen nämlich reciprok verwandt oder kürzer reciprok:

1) Zwei ebene Systeme Σ und Σ_1, wenn jedem Punkte P von Σ eine Gerade p_1 von Σ_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ ein in p_1 liegender Punkt G_1 von P_1;
2) ein ebenes System Σ und einen Strahlenbündel S_1, wenn jedem Punkte P von Σ eine Ebene π_1 von S_1 entspricht, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ ein in π_1 liegender Strahl g_1 von S_1;
3) zwei Strahlenbündel S und S_1, wenn jedem Strahle g von S eine Ebene γ_1 von S_1 entspricht, und jeder durch g gehenden Ebene ε von S ein in γ_1 liegender Strahl e_1 von S_1;

und wenn ausserdem jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Grundgebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des andern entspricht.

Kürzer, und dann auch auf räumliche Systeme anwendbar lässt sich diese Erklärung der Reciprocität wie folgt aussprechen:

Zwei auf einander bezogene Grundgebilde der zweiten oder der dritten Stufe heissen reciprok, wenn je zwei ungleichartigen Elementen P, g *des einen, von welchen* P *in* g *liegt, resp. zwei ungleichartige Elemente* p_1, G_1 *des andern zugewiesen sind, von welchen* p_1 *durch* G_1 *geht.*

Die Möglichkeit dieser Art der Verwandtschaft werde ich Ihnen noch beweisen, da sie keineswegs wie diejenige der Colli-

neation ohne Weiteres einleuchtet; nur für einen speciellen Fall ist dieser Beweis bereits geführt, indem gezeigt wurde, dass in Bezug auf eine Curve II. Ordnung jedem Punkt P der Ebene eine Gerade, nämlich seine Polare p_1, entspricht und jeder durch P gehenden Geraden der Ebene ein auf p_1 liegender Punkt, nämlich der Pol jener Geraden. Der allgemeine Beweis schliesst denjenigen des Reciprocitäts-Gesetzes in sich; denn weil z. B. in reciproken räumlichen Systemen jedem Punkte eine Ebene entspricht, so folgt aus jeder Eigenschaft eines Systems von Punkten unmittelbar die entsprechende Eigenschaft eines Systems von Ebenen, welches jenem Punktsystem reciprok ist.

Die Untersuchung reciproker Grundgebilde ist ausserdem deshalb besonders wichtig, weil sie diejenige collinearer Grundgebilde einschliesst, soweit nicht besondere Lagen derselben in Betracht kommen. Dieses wird Ihnen aus folgendem Satz einleuchten:

Wenn zwei Grundgebilde einem dritten reciprok sind, so sind sie collinear; und wenn umgekehrt das eine von zwei collinearen Grundgebilden einem dritten reciprok ist, so ist auch das andere demselben reciprok.

Wenn nämlich z. B. zwei ebene Systeme Σ_1 und Σ_2 einem dritten Σ reciprok sind, so entspricht jedem Punkte P des letzteren je eine Gerade p_1 und p_2 der ersteren, und jeder durch P gehenden Geraden g von Σ entspricht in Σ_1 und Σ_2 je ein auf p_1 resp. p_2 liegender Punkt G_1 oder G_2. Folglich entspricht jeder Geraden p_1 von Σ_1 eine Gerade p_2 von Σ_2 und jedem auf p_1 liegenden Punkte G_1 von Σ_1 ein auf p_2 liegender Punkt G_2 von Σ_2; d. h. Σ_1 und Σ_2 sind collinear. Auf analoge Weise wird dieser und der zweite Theil des Satzes für alle anderen Fälle bewiesen; doch lassen sich solche auch sofort auf den vorliegenden Fall zurückführen durch die Bemerkung, dass wir für jeden Strahlenbündel einen ebenen Schnitt desselben substituiren können.

Zwei collineare oder reciproke Grundgebilde werden auch projectivisch genannt, weil jedem harmonischen Gebilde des einen ein harmonisches Gebilde des andern entspricht. Denn seien z. B. A, B, C, D vier harmonische Punkte eines ebenen Systems Σ, und a_1, b_1, c_1, d_1 die entsprechenden vier Strahlen eines zu Σ reciproken ebenen Systems Σ_1, so müssen zunächst a_1, b_1, c_1 und d_1 durch einen Punkt U_1 gehen (Fig. 1), weil A, B, C und D auf einer Geraden u liegen. Jedem Viereck $KLMN$

in Σ, von welchen zwei Gegenseiten sich in A und zwei andere in C schneiden, während die letzten beiden Seiten beziehungsweise durch B und D gehen, entspricht dann in Σ_1 ein Vierseit $k_1\, l_1\, m_1\, n_1$, von welchem je zwei gegenüberliegende Eckpunkte in a_1 und c_1, und die letzten beiden Eckpunkte beziehungsweise auf b_1 und d_1 liegen. Folglich sind a_1, b_1, c_1, d_1 wirklich vier harmonische Strahlen (I. Abth. Seite 36). Ich empfehle Ihnen zur Uebung auch für zwei collineare Systeme den Beweis zu führen, obwohl er in dem soeben geführten schon enthalten ist.

Es ergiebt sich aus dieser Untersuchung der Satz:

Je zwei einförmige Gebilde, welche in collinearen oder reciproken Grundgebilden einander entsprechen, sind projectivisch.

Denn die beiden einförmigen Gebilde sind auf einander bezogen, und zwar so, dass je vier harmonischen Elementen des einen allemal vier harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen.

Dieser Satz giebt uns ein Mittel an die Hand, zwei Grundgebilde zweiter Stufe projectivisch auf einander zu beziehen. Sollen z. B. zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen werden, so müssen wir jedem Punkte von Σ einen Strahl von Σ_1 und jeder Punktreihe von Σ einen zu ihr projectivischen Strahlenbüschel von Σ_1 zuweisen, und umgekehrt. Wir nehmen deshalb in Σ (Fig. 2) zwei Punktreihen u und v an, und weisen diesen in Σ_1 zwei beliebige Strahlenbüschel U_1 und V_1 als entsprechende zu, indem wir u auf U_1 und v auf V_1 projectivisch beziehen, so jedoch, dass dem gemeinschaftlichen Punkte P von u und v der gemeinschaftliche Strahl p_1 von U_1 und V_1 entspricht. Jeder nicht durch P gehende Strahl k von Σ schneidet dann die resp. Geraden u und v in zwei Punkten A und D, welchen in den Büscheln U_1 und V_1 von Σ_1 die resp. Strahlen a_1 und d_1 entsprechen; und der Schnittpunkt K_1 dieser letzteren ist folglich zu jenem Strahle k der entsprechende. Den sämmtlichen Strahlen eines Punktes S entsprechen ferner die sämmtlichen Punkte einer Geraden s_1; denn durch den Strahlenbüschel S werden die Punktreihen u und v perspectivisch auf einander bezogen, so dass sie den Punkt P entsprechend gemein haben, und daher auch die Strahlenbüschel U_1 und V_1 projectivisch so, dass sie den Strahl p_1 entsprechend gemein haben. Diese Büschel liegen also ebenfalls perspectivisch, und erzeugen somit ein gerades Gebilde s_1, welches jenem Strahlenbüschel S entspricht. Sie erkennen hieraus, dass durch die einander zugewiesenen projectivischen

Gebilde u und U_1, sowie v und V_1 jedem Strahle k von Σ ein Punkt K_1 von Σ_1 zugewiesen ist, jedem auf k liegenden Punkte S aber ein durch K_1 gehender Strahl s_1, dass also wirklich Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen sind. Da hiernach zu jedem ebenen Gebilde ein reciprokes construirt werden kann, so ist das Reciprocitätsgesetz für ebene Systeme, oder wie wir sogleich sehen werden für Grundgebilde der zweiten Stufe von Neuem bewiesen.

Sollen zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen werden, so brauchen wir nur beide in der soeben angegebenen Weise reciprok auf ein drittes zu beziehen. Daraus ergeben sich folgende direkte Methoden:

1) Wir nehmen in Σ und Σ_1 je zwei gerade Punktreihen u, v und u_1, v_1 willkürlich an, und beziehen u auf u_1 und v auf v_1 projectivisch, so jedoch, dass der gemeinschaftliche Punkt von u und v dem gemeinschaftlichen Punkte von u_1 und v_1 entspricht.
2) Oder wir weisen irgend zwei Strahlenbüscheln U und V von Σ zwei beliebige Strahlenbüschel U_1 und V_1 von Σ_1 als entsprechende zu, und beziehen U auf U_1, sowie V auf V_1 projectivisch so, dass der Strahl $\overline{U\,V}$ von Σ dem Strahle $\overline{U_1\,V_1}$ von Σ_1 entspricht.

Diese direkten Methoden können auch direkt bewiesen werden, ähnlich wie die vorhin für reciproke Systeme angegebene Methode.

Sollen zwei Strahlenbündel, oder ein Strahlenbündel und ein ebenes System entweder reciprok oder collinear auf einander bezogen werden, so können auch hierfür leicht ähnliche Methoden wie die obigen aufgestellt und bewiesen werden. Doch ist es einfacher, wenn wir diese Fälle auf die schon erledigten dadurch zurückführen, dass wir jedem Strahlenbündel einen ebenen Schnitt desselben substituiren. So z. B. gilt der Satz:

„Um zwei Strahlenbündel S und S_1 reciprok auf einander zu „beziehen, können wir in dem einen S zwei Strahlenbüschel α „und β und im andern S_1 zwei Ebenenbüschel a_1 und b_1 will„kürlich annehmen, und sodann α auf a_1 und β auf b_1 pro„jectivisch beziehen, so dass dem gemeinschaftlichen Strahle „$\alpha\,\beta$ der Strahlenbüschel die gemeinschaftliche Ebene $\overline{a_1\,b_1}$ der „Ebenenbüschel entspricht. Dadurch ist jedem Elemente des „Bündels S ein bestimmtes Element des Bündels S_1 zuge„wiesen.“

Diese Methode folgt sofort aus derjenigen, welche vorhin für ebene Systeme bewiesen wurde.

Um die Systeme Σ und Σ_1 (Fig 2) reciprok auf einander zu beziehen, haben wir vorhin die Geraden u und v in Σ, sowie die entsprechenden Punkte U_1 und V_1 in Σ_1 ganz beliebig angenommen. Ferner durften wir u auf U_1 und v auf V_1 in ganz beliebiger Weise projectivisch beziehen; nur die eine Bedingung musste erfüllt werden, dass dem Schnittpunkte $u\dot{}v$ oder P die Verbindungslinie $\overline{U_1 V_1}$ oder p_1 entspreche. Wir dürfen also noch zwei beliebigen Punkten A und B von u zwei beliebige Strahlen a_1 und b_1 von U_1 als entsprechende zuweisen, und ebenso irgend zwei Punkten C und D von v zwei beliebige Strahlen c_1 und d_1 von V_1, wodurch dann aber jedem Element von Σ ein bestimmtes Element von Σ_1 zugewiesen ist. Offenbar kann $A\,B\,C\,D$ als ein ganz beliebiges Viereck der Ebene Σ angesehen werden, weil die Geraden u und v, und in diesen die Punkte A, B und C, D willkürlich angenommen werden können; und ebenso ist $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ als ein ganz beliebiges Vierseit von Σ_1 aufzufassen. Daraus ergiebt sich der Satz:

Sollen zwei ebene Systeme Σ *und* Σ_1 *reciprok auf einander bezogen werden, so kann man den Eckpunkten* A, B, C, D *irgend eines Vierecks von* Σ *die resp. Seiten* a_1, b_1, c_1, d_1 *eines beliebigen Vierseits von* Σ_1 *willkürlich zuweisen, wodurch dann aber jedem Elemente von* Σ *ein bestimmtes Element von* Σ_1 *zugewiesen ist.*

Ebenso können zwei ebene Systeme auf eine einzige Weise collinear so auf einander bezogen werden, dass zwei Vierecke oder zwei Vierseite derselben auf bestimmte Art einander entsprechen. Ueberhaupt lässt sich unser Satz sofort auf beliebige Grundgebilde der zweiten Stufe ausdehnen, da alle übrigen Fälle auf den soeben erörterten zurückgeführt werden können; er lautet sodann:

Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe lassen sich auf eine einzige Weise projectivisch auf einander beziehen, so dass irgend vier gleichartigen Elementen A, B, C, D *des einen, von welchen jedoch keine drei zu einem und demselben einförmigen Grundgebilde gehören, vier derselben Bedingung genügende, gleichartige Elemente* A_1, B_1, C_1, D_1 *des andern als resp. entsprechende willkürlich zugewiesen werden.*

Je zwei einander entsprechende Elemente, wie A und A_1, sind die Träger von zwei einförmigen Grundgebilden, und diese können und müssen projectivisch auf einander bezogen werden, so dass den Elementen $A\ B$, $A\ C$ und $A\ D$ die resp. Elemente $A_1\ B_1$, $A_1\ C_1$ und $A_1\ D_1$ entsprechen. Daraus lässt sich auch direkt die Richtigkeit des Satzes beweisen.

Zweiter Vortrag.

Curven, welche in collinearen und reciproken ebenen Systemen einander entsprechen.

Die Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität lassen sich mit vielem Nutzen dazu verwenden, gegebene Gebilde, z. B. Curven oder Flächen, in andere zu verwandeln. Nicht selten gelingt es dadurch, Sätze, welche an besonderen Gebilden aufgefunden sind, zu verallgemeinern; so z. B. sind manche Eigenschaften des Kreises mittelst der projectivischen Verwandtschaft auch für beliebige Kegelschnitte nachgewiesen worden. Ueber diese Verwandlung von gegebenen Gebilden in andere bieten sich uns einige allgemeine Bemerkungen dar.

Seien Σ und Σ_1 zwei collineare ebene Systeme, P und P_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte derselben. Wenn dann P in Σ irgend eine Curve k durchläuft, so beschreibt zugleich P_1 in Σ_1 eine Curve k_1, welche zu k collinear ist. Wenn die Curve k von irgend einer Geraden g in n Punkten geschnitten wird, so muss auch k_1 von der entsprechenden Geraden g_1 in n Punkten geschnitten werden; nämlich in denjenigen Punkten, welche den Schnittpunkten von k und g entsprechen. Fallen von den Schnittpunkten von k und g irgend zwei zusammen, so dass die Curve k von der Geraden g berührt wird, so fallen auch die entsprechenden beiden Schnittpunkte von k_1 und g_1 zusammen, und k_1 wird von g_1 berührt; zugleich sind die Berührungspunkte in g und g_1 zwei einander entsprechende Curvenpunkte. Die Tangenten an zwei homologen Punkten der Curven k und k_1 sind also zwei homologe Strahlen der collinearen Systeme Σ und Σ_1. Jeder Tangente, die aus einem beliebigen Punkte A von Σ an

die Curve k gelegt werden kann, entspricht eine Tangente von k_1, die durch den homologen Punkt A_1 von Σ_1 hindurchgeht; so dass von A_1 an k_1 ebenso viele Tangenten gelegt werden können, wie von A an k. Geht k mehrmals durch einen Punkt von Σ, so geht k_1 ebenso oft durch den entsprechenden Punkt von Σ_1 u. s. w.

Man pflegt die ebenen Curven zu unterscheiden in Bezug auf ihre Ordnung und ihre Classe; nämlich:

Eine ebene Curve n ter Ordnung hat mit einer beliebigen Geraden ihrer Ebene im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein.

An eine ebene Curve n ter Classe können aus einem beliebigen Punkte ihrer Ebene im Allgemeinen und höchstens n Tangenten gezogen werden.

Hiernach können wir die wichtigeren der soeben gefundenen Sätze wie folgt zusammenfassen:

Zwei Curven k *und* k_1, *welche in collinearen ebenen Systemen einander entsprechen, sind von gleicher Ordnung und gleicher Classe. Jedem vielfachen Punkte von* k *entspricht ein vielfacher Punkt von derselben Ordnung in* k_1*; ebenso jeder mehrfachen Tangente von* k *eine solche von* k_1.

Wenn die ebene Curve k von einem Punkte P und zugleich ihr Tangentenbüschel von der Tangente p dieses Punktes beschrieben wird, so bewegt sich P stetig in der Geraden p, während p sich in der Curven-Ebene stetig um P dreht; die zu k collineare Curve k_1 und ihr Tangentenbüschel werden ebenso von dem Punkte P_1 und der Tangente p_1 beschrieben, welche den Elementen P, p entsprechen. Aendert nun die Tangente p in einer bestimmten Lage w den Sinn ihrer Drehung um P, so heisst w eine stationäre oder „Wende-Tangente", und der Berührungspunkt von w heisst ein Wende- oder Inflexionspunkt der Curve k ($\backsim$). Wenn anderseits der Punkt P an irgend einer Stelle R den Sinn seiner Bewegung in p ändert, so heisst R ein stationärer oder „Rückkehr-Punkt" (eine Spitze $\succ$) der Curve k. Jeder Wendetangente und jedem Rückkehrpunkte von k entspricht eine Wendetangente resp. ein Rückkehrpunkt der zu k collinearen Curve k_1.

Ist k eine Curve zweiter Ordnung, so muss auch k_1 eine solche sein; und zwar lässt sich leicht zeigen, dass k_1 auch die projectivischen Eigenschaften mit k theilt, und nicht blos wie k mit jeder sie schneidenden Geraden im Allgemeinen und höchstens zwei Punkte gemein hat. Denn wenn k durch zwei projectivische

Strahlenbüschel A und B erzeugt wird, so wird k_1 durch die entsprechenden beiden Strahlenbüschel A_1 und B_1 erzeugt; und es ist $A_1 \barwedge B_1$, weil $A \barwedge A_1$, $B \barwedge B_1$ und $A \barwedge B$, sodass auch k_1 als Erzeugniss projectivischer Strahlenbüschel zu betrachten ist. Zugleich ergiebt sich hieraus:

„Zwei Curven II. Ordnung, welche in collinearen ebenen Sy-„stemen einander entsprechen, sind projectivisch auf einander „bezogen.“

Wir können diesen Satz auch umkehren; nämlich:

„Zwei projectivische Curven II. Ordnung können stets als „homologe Curven von zwei collinearen ebenen Systemen be-„trachtet werden.“

Seien nämlich A, B, C irgend drei Punkte der ersten Curve k und A_1, B_1, C_1 die ihnen resp. entsprechenden Punkte der zweiten Curve k_1, sei ferner D der Pol von $\overline{AB}$ in Bezug auf k und D_1 derjenige von $A_1 B_1$ in Bezug auf die Curve k_1. Wenn dann die Curven in zwei collinearen ebenen Systemen einander entsprechen, so müssen die Tangenten von k in A und B den Tangenten von k_1 in A_1 und B_1 entsprechen, und folglich sind auch die Punkte D und D_1 zwei homologe Punkte der collinearen Systeme. Die ebenen Systeme, in welchen die Curven liegen, lassen sich nun aber wirklich collinear so auf einander beziehen, dass den vier Punkten A, B, C, D des einen die resp. Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen; und der Curve k, welche durch C geht, und in A und B die Geraden $\overline{DA}$ und $\overline{DB}$ berührt, entspricht alsdann die Curve k_1, welche durch C_1 geht, und in A_1 und B_1 die Geraden $\overline{D_1 A_1}$ und $\overline{D_1 B_1}$ berührt. Die collineare Verwandtschaft der ebenen Systeme ist somit durch die beiden projectivischen Curven völlig und eindeutig bestimmt; und zwar entsprechen je zwei Elementen, welche bezüglich der einen Curve conjugirt oder einander zugeordnet sind, zwei in Bezug auf die andere Curve conjugirte oder einander zugeordnete Elemente.

Wenn zwei ebene Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen sind, so entspricht im Allgemeinen der unendlich fernen Geraden des einen eine eigentliche Gerade, die sogenannte „Gegenaxe“, des anderen Systems. Zwei parallelen Geraden der einen Ebene entsprechen allemal zwei Gerade, die sich auf der Gegenaxe der anderen Ebene schneiden. Zwei collineare ebene Curven können deshalb, wenn sie auch von derselben Ordnung und Classe sind, sich wesentlich unterscheiden hinsichtlich ihrer unendlich fernen Punkte;

denn den unendlich fernen Punkten der einen Curve entsprechen diejenigen Punkte, welche die andere Curve mit der Gegenaxe ihrer Ebene gemein hat, und den Asymptoten der einen Curve, d. h. den Tangenten ihrer unendlich fernen Punkte, entsprechen im Allgemeinen eigentliche Tangenten der anderen Curve. Beispielsweise entspricht einer Ellipse der einen Ebene, welche von deren Gegenaxe geschnitten oder berührt wird, eine Hyperbel resp. Parabel der anderen Ebene.

Wir nennen „invariant" jede Eigenschaft eines geometrischen Gebildes und jede Beziehung verschiedener Gebilde zu einander, welche durch collineare Transformationen nicht zerstört wird. Z. B. Ordnung und Classe einer ebenen Curve sind invariant, desgleichen die Anzahl ihrer Doppelpunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten und Inflexionstangenten. Harmonische Punkte oder Strahlen stehen in invarianter Beziehung zu einander, und Dasselbe gilt von projectivischen Elementargebilden. Die Beziehungen einer Curve zweiter Ordnung zu ihrem Mittelpunkte und ihren Brennpunkten sind durchaus nicht invariant; wohl aber diejenigen zu zwei bezüglich der Curve conjugirten Strahlen oder Punkten, oder zu einem Punkte und seiner Polare. Das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden oder vier Strahlen eines Büschels I. Ordnung ist invariant. Drei Elementenpaare eines involutorischen Elementargebildes stehen zu einander in invarianter Beziehung; auch die characteristische Eigenschaft eines Pascal'schen Sechsecks ist invariant. — Schon Poncelet hat die grosse Bedeutung der invarianten Eigenschaften geometrischer Gebilde klar erkannt und nachdrücklich hervorgehoben; er nennt diese Eigenschaften projectivisch, weil sie auf alle collinearen Gebilde übergehen, welche aus den gegebenen durch Projiciren und Schneiden abgeleitet werden können.

Sind Σ und Σ_1 zwei reciproke ebene Systeme, so entspricht jedem Punkte P von Σ ein Strahl p_1 von Σ_1. Wenn nun P in Σ irgend eine Curve k durchläuft, so beschreibt gleichzeitig p_1 eine stetige Aufeinanderfolge K_1 von Strahlen, welche ein Strahlenbüschel heissen soll. Nähert sich P einem festen Punkte Q der Curve k, so nähert sich p_1 einem festen Strahle q_1 des Büschels K_1, und dem Strahle $\overline{PQ}$, der sich um Q dreht, entspricht dann der Punkt $p_1 q_1$, welcher auf der Geraden q_1 fortgleitet. Und wie $\overline{PQ}$ schliesslich, wenn P ins Unbegrenzte dem Punkte Q sich nähert (Fig. 3), mit einer festen Geraden, nämlich mit der Tangente q des Punktes Q zusammenfällt, so fällt auch $p_1 q_1$ schliesslich mit

einem festen Punkte zusammen, nämlich mit dem Berührungspunkte Q_1 des Strahles q_1, welcher also jener Tangente entspricht (vergl. I. Abth. Seite 65). Jedem Punkte Q der Curve k nebst seiner Tangente q entspricht demnach ein Strahl q_1 des Büschels K_1 nebst seinem Berührungspunkte Q_1; und den stetig auf einander folgenden Tangenten von k entsprechen stetig auf einander folgende Berührungspunkte von K_1. Mit einem Wort: dem Büschel K von Tangenten, welche die Curve k einhüllen, entspricht eine Curve k_1, welche vom Büschel K_1 eingehüllt wird. Wenn k mit irgend einer Geraden g ihrer Ebene n Punkte gemein hat, so gehen die entsprechenden n Strahlen des Büschels K_1 oder Tangenten der Curve k_1 durch denjenigen Punkt von Σ_1, welcher jener Geraden entspricht. Ueberhaupt gilt folgender Satz:

Wenn zwei Curven k *und* k_1 *in reciproken Systemen einander entsprechen, so ist die Ordnung der einen gleich der Classe der andern. Jedem Punkte der einen Curve nebst dessen Tangente entspricht eine Tangente der andern nebst deren Berührungspunkt; jedem mehrfachen Punkte der einen entspricht eine mehrfache Tangente der anderen, und jedem Wendepunkte eine Rückkehrtangente.*

Ist insbesondere k eine Curve II. Ordnung, so ist k_1 eine Curve zweiter Classe, welche nämlich von einem Strahlenbüschel II. Ordnung eingehüllt wird. Dieser Büschel wird durch zwei projectivische Punktreihen a_1 und b_1 erzeugt, wenn die Curve k durch zwei projectivische Strahlenbüschel A und B erzeugt ist; denn weil $a_1 \barwedge A$ und $b_1 \barwedge B$, so folgt aus $A \barwedge B$ auch $a_1 \barwedge b_1$. — Wir haben schon früher gesehen, dass jede Curve zweiter Ordnung von einem Büschel zweiter Ordnung eingehüllt wird und also auch von der zweiten Classe ist; bei Curven höherer Ordnung oder Classe findet eine solche Uebereinstimmung nicht mehr Statt.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich über Kegelflächen anstellen, welche in projectivischen Strahlenbündeln einander entsprechen. Doch können Sie alle Resultate, welche sich für solche Kegelflächen ergeben, auch aus den soeben gewonnenen ableiten, indem Sie zwei projectivische ebene Systeme aus irgend zwei Mittelpunkten durch Strahlenbündel projiciren. Dabei ergiebt sich u. A. auch, was unter Kegelflächen n ter Ordnung oder n ter Classe zu verstehen ist. Wird z. B. ein ebenes System Σ auf einen Strahlenbündel S_1 reciprok bezogen, so entspricht jeder Curve n ter Ordnung und p ter Classe von Σ eine Kegelfläche n ter Classe und p ter Ordnung in S_1.

Dritter Vortrag.

Perspectivische Lage von collinearen Grundgebilden zweiter Stufe.

Wir haben gesehen, dass in zwei collinearen oder reciproken Grundgebilden je vier harmonische Elemente des einen stets wieder vier harmonischen Elementen des andern entsprechen, und daraus bereits den Schluss gezogen, dass irgend zwei einander entsprechende einförmige Grundgebilde derselben projectivisch sein müssen. Haben also zwei collineare oder reciproke Grundgebilde Σ und Σ_1 eine solche Lage, dass nicht allein die Träger a und a_1 von irgend zwei einander entsprechenden einförmigen Grundgebilden, sondern auch drei Paare homologer Elemente der letzteren auf einander fallen, so müssen je zwei einander entsprechende Elemente von a und a_1 zusammenfallen (I. Abth. Seite 45), und Σ und Σ_1 haben somit jedes Element von a und a_1 entsprechend gemein. Insbesondere also gilt der Satz:

Wenn zwei collineare ebene Systeme, die nicht in derselben Ebene liegen, drei Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so haben sie jeden Punkt derselben entsprechend gemein.

Wenn zwei collineare Strahlenbündel, die nicht concentrisch liegen, drei Ebenen entsprechend gemein haben, so haben sie jede durch ihre Mittelpunkte gehende Ebene entsprechend gemein.

Mit einer geringen Veränderung lässt sich dieser Doppelsatz auch für ebene Systeme, die aufeinander liegen, sowie für concentrische Strahlenbündel aufstellen.

Wenn zwei in derselben Ebenen liegende collineare Systeme Σ und Σ_1 die sämmtlichen Punkte von zwei Geraden u und v oder die sämmtlichen Strahlen von zwei Büscheln S und T entsprechend gemein haben, so fällt jedes Element von Σ mit seinem entsprechenden von Σ_1 zusammen. Denn im ersteren Falle entspricht jede Gerade der Ebene sich selbst, weil sie zwei sich selbst entsprechende Punkte verbindet, nämlich einen Punkt von u mit einem Punkte von v; und jeder Punkt der Ebene entspricht sich selbst, weil er als Schnittpunkt solcher sich selbst entsprechender Geraden angesehen werden kann. Ebenso entspricht im zweiten

Falle jeder Punkt der Ebene sich selbst, weil in ihm zwei sich selbst entsprechende Strahlen der Büschel S und T sich schneiden, jede Gerade der Ebene aber kann als Verbindungslinie solcher Punkte aufgefasst werden. Wir werden hierdurch zu folgendem Satze geführt:

Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme haben alle ihre Elemente entsprechend gemein (oder sind identisch), wenn sie die Eckpunkte eines Vierecks, oder auch die Seiten eines Vierseits entsprechend gemein haben.

Zwei concentrische collineare Strahlenbündel haben alle ihre Elemente entsprechend gemein (oder sind identisch), wenn sie die Kanten eines Vierkants oder auch die Seiten eines Vierseits entsprechend gemein haben.

Der Satz rechts wird auf den anderen links sofort zurückgeführt, indem wir die beiden Strahlenbündel durch eine Ebene schneiden. Die collinearen Systeme, welche in dieser liegen, haben aber die Eckpunkte A, B, C, D eines Vierecks oder auch eines einfachen Vierseits entsprechend gemein, deshalb aber auch die Strahlen $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ und folglich jeden Strahl des Büschels A, sowie die Strahlen $\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}$ und folglich jeden Strahl des Büschels B; woraus der Satz folgt. Zwei beliebig auf einander gelegte collineare Systeme haben daher im Allgemeinen höchstens drei Punkte und deren Verbindungslinien entsprechend gemein.

Aus dem soeben bewiesenen Satze lassen sich folgende Schlüsse ziehen in Betreff der perspectivischen Lage collinearer Systeme und Strahlenbündel.

Wenn zwei collineare Systeme Σ und Σ_1 in verschiedenen Ebenen liegen, und irgend vier Strahlen, welche die Eckpunkte eines Vierecks von Σ mit den resp. entsprechenden Punkten von Σ_1 verbinden, durch einen Punkt S gehen, so liegen die Systeme perspectivisch und sind Schnitte des Strahlenbündels S. Denn die beiden collinearen Strahlenbündel, durch welche die ebenen Systeme aus S projicirt werden, sind identisch,

Wenn zwei collineare Strahlenbündel S und S_1 verschiedene Mittelpunkte haben, und irgend vier Strahlen, in welchen die Seitenebenen eines Vierseits von S durch die resp. entsprechenden Ebenen von S_1 geschnitten werden, in einer Ebene Σ liegen, so sind die Bündel perspectivisch und Scheine des ebenen Systems Σ. Denn die beiden collinearen Systeme, in welchen die Strahlenbündel durch Σ geschnitten werden, sind identisch,

weil sie ein Vierkant entsprechend gemein haben.

weil sie ein Vierseit entsprechend gemein haben.

Ich überlasse Ihnen den ganz ähnlichen Beweis des Satzes: „Ein ebenes System Σ liegt perspectivisch zu einem ihm colli- „nearen Strahlenbündel S, wenn die Eckpunkte eines Vierecks „von Σ auf den ihnen entsprechenden Strahlen von S liegen.“ Ihnen wird die Analogie nicht entgangen sein, welche zwischen diesen Theoremen und denjenigen herrscht, die wir für projectivische Grundgebilde der ersten Stufe im fünften Vortrag der ersten Abtheilung kennen gelernt haben. Aehnliches lässt sich über den folgenden Doppelsatz bemerken, welchen ich später häufig benutzen werde.

Wenn zwei collineare ebene Systeme drei und folglich alle Punkte eines geraden Gebildes u entsprechend gemein haben, so schneiden sich die Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten derselben in einem bestimmten Punkte S. — Nämlich beliebige zwei einander entsprechende Gerade l und l_1 (Fig. 4) müssen irgend einen Punkt A von u entsprechend gemein haben, weil jeder Punkt von u sich selbst entspricht. Die sämmtlichen Geraden $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}, \ldots$ welche je einen Punkt $(D, E, \ldots)$ von l mit dem ihm entsprechenden Punkte $(D_1 E_1, \ldots)$ von l_1 verbinden, gehen daher durch einen Punkt S, weil die Punktreihen l und l_1 ihren Schnittpunkt A entsprechend gemein haben und somit perspectivisch sind. Liegen nun die Systeme in einer Ebene, und ist P der Schnittpunkt eines durch S gehenden Strahles $\overline{DD_1}$ mit der Geraden u, so entspricht die

Wenn zwei collineare Strahlenbündel drei und folglich alle Ebenen eines Büschels u entsprechend gemein haben, so liegen die Schnittlinien von je zwei homologen Ebenen derselben in einer bestimmten Ebene Σ. — Nämlich beliebige zwei einander entsprechende Strahlen l und l_1 müssen in irgend einer Ebene α von u liegen, weil jede Ebene von u sich selbst entspricht. Die sämmtlichen Strahlen $\overline{\delta\delta_1}$, $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}, \ldots$ in denen je eine Ebene $(\delta_1, \varepsilon_1 \ldots)$ des Büschels l von der ihr entsprechenden Ebene $(\delta_1, \varepsilon_1, \ldots)$ des Büschels l_1 geschnitten wird, liegen daher in einer Ebene Σ; denn die Büschel haben die Ebene α entsprechend gemein und somit perspectivische Lage. Haben nun die Strahlenbündel denselben Mittelpunkt, und ist π die Ebene, welche einen beliebigen in Σ liegenden Strahl $\overline{\delta\delta_1}$ mit der Axe u verbindet, so entspricht der Strahl $\overline{\pi\delta}$

Gerade $\overline{PD}$ der Geraden $\overline{PD_1}$, also sich selbst, weil P sich selbst entspricht. Jeder durch S gehende Strahl fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, woraus folgt, dass je zwei homologe Punkte auf einem durch S gehenden Strahle liegen. Schneiden sich dagegen die Systeme in der Geraden u, so folgt, dass je zwei Verbindungslinien homologer Punkte, wie $\overline{DD_1}$ und $\overline{EE_1}$, in einer Ebene liegen und somit sich schneiden. Weil aber nicht alle diese Verbindungslinien in einer und derselben Ebene liegen, so müssen sie durch einen und denselben Punkt S gehen, und die Systeme sind Schnitte des Strahlenbündels S.

dem Strahle $\overline{\pi\delta_1}$, also sich selbst, weil π sich selbst entspricht. Jeder in Σ liegende Strahl fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, woraus folgt, dass je zwei homologe Ebenen sich in einem Strahle der Ebene Σ schneiden. Haben dagegen die Bündel zwei verschiedene in der Axe u liegende Mittelpunkte, so folgt, dass je zwei Schnittlinien homologer Ebenen, wie $\overline{\delta\delta_1}$ und $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$, in einer Ebene liegen und somit sich schneiden. Weil aber nicht alle diese Schnittlinien durch einen und denselben Punkt gehen, so müssen sie in einer und derselben Ebene Σ liegen, und die Strahlenbündel sind Scheine des ebenen Systems Σ.

Wir können diese bemerkenswerthen Sätze auch in folgender Form aussprechen:

Zwei collineare ebene Systeme, die sich schneiden und drei Punkte (ihrer Schnittlinie) entsprechend gemein haben, liegen perspectivisch.

Zwei collineare Strahlenbündel, die nicht concentrisch sind und drei Ebenen entsprechend gemein haben, liegen perspectivisch.

Wenn zwei in einer Ebene liegende collineare Systeme eine Punktreihe (d. h. jeden Punkt derselben) entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbüschel (d. h. jeden Strahl desselben) entsprechend gemein.

Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Ebenenbüschel (d. h. jede Ebene desselben) entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein.

Dass umgekehrt zwei perspectivische ebene Systeme jeden Punkt ihrer Schnittlinie und zwei perspectivische Strahlenbündel jede durch beide Mittelpunkte gehende Ebene entsprechend gemein haben, leuchtet ohne Weiteres ein. Aber auch die letzten beiden Sätze lassen sich umkehren; nämlich:

Wenn zwei in einer Ebene liegende collineare Systeme einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, so haben sie auch eine Punktreihe entsprechend gemein.

Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein.

Denn wenn wir links die Systeme aus einem beliebigen Mittelpunkte durch zwei concentrische Strahlenbündel projiciren, so haben diese einen Ebenenbüschel und folglich (nach dem vorhergehenden Satze rechts) auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, von welchem die im Satz genannte Punktreihe ein Schnitt ist. Ebenso wird der Satz rechts auf den vorhergehenden links zurückgeführt, wenn wir die concentrischen Strahlenbündel durch eine Ebene in zwei auf einander liegenden Systemen schneiden. Uebrigens können Sie den letzten Doppelsatz auch direkt beweisen auf analoge Weise wie den vorigen.

Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme, welche ein gerades Gebilde u und einen Strahlenbüschel S entsprechend gemein haben, werden perspectivisch genannt, weil sie viele Eigenschaften zeigen, die auch sonst perspectivisch liegenden Systemen zukommen. Der Punkt S, welcher mit je zwei einander entsprechenden Punkten in einer und derselben Geraden liegt, heisst das „Centrum", und die Gerade u, auf welcher je zwei homologe Gerade sich schneiden, die „Axe der Collineation". Stellen Sie sich vor, von zwei perspectivischen ebenen Systemen drehe sich das eine um seine Schnittlinie mit dem anderen System, so werden freilich die Verbindungslinien homologer Punkte gleichzeitig ihre Lage ändern, aber doch beständig nach einem gleichfalls sich bewegenden Punkte convergiren, weil die Systeme jeden Punkt ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben. Fallen nun die Systeme bei der Drehung auf einander, so ist diese Lage als ein besonderer Fall der allgemeinen perspectivischen zu betrachten. — Zwei concentrische und collineare Strahlenbündel heissen auch dann perspectivisch, wenn sie einen Strahlenbüschel und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben.

Um zwei in einer Ebene liegende Systeme perspectivisch auf einander zu beziehen, können wir die Axe u und das Centrum S der Collineation willkürlich annehmen (Fig. 4), und sodann noch irgend zwei Punkte D und D_1, welche auf einem Strahle von S liegen, einander als entsprechende zuweisen. Denn wir können

und müssen die beiden Systeme collinear so auf einander beziehen, dass die beiden zu der Punktreihe u perspectivischen Strahlenbüschel D und D_1 einander entsprechen, und dass der Büschel S sich selbst entspricht; dadurch ist ihre collineare Verwandtschaft völlig und eindeutig bestimmt (Seite 6). Weil aber in jedem Punkte A von u zwei homologe Strahlen l und l_1 von resp. D und D_1 sich schneiden, und weil durch A auch ein sich selbst entsprechender Strahl a des Büschels S hindurchgeht, so muss A oder $l \cdot a$ sich selbst, nämlich dem Punkte $l_1 \cdot a$ entsprechen, und die beiden Systeme haben folglich jeden Punkt von u entsprechend gemein, wie verlangt wurde.

Jeder durch D gehende Strahl wird von seinem durch D_1 gehenden entsprechenden Strahle in einem Punkte von u geschnitten, kann also leicht construirt werden; und da je zwei homologe Punkte E und E_1 auf homologen Strahlen von D und D_1 und zugleich mit S in einer Geraden liegen, so ist zu E leicht der entsprechende Punkt E_1 zu finden. Es wird eine sehr nützliche und lehrreiche Uebung für Sie sein, wenn Sie auf diese Weise zu irgend einer gegebenen Curve die entsprechende construiren, d. h. zu beliebig vielen Punkten der ersteren die entsprechenden Punkte der letzteren. Von Interesse ist bei dieser Construction namentlich die Frage, wo die Gegenaxe des einen Systems liegt, welche der unendlich fernen Geraden des anderen entspricht; denn von der Lage dieser Gegenaxe hängt es wesentlich ab, ob und mit wie vielen Zweigen die gesuchte Curve in's Unendliche sich erstreckt. Die Gegenaxe muss zu der Collineationsaxe parallel sein, weil sie ihre entsprechende Gerade auf der Collineationsaxe und zugleich in einem unendlich fernen Punkte schneidet. — Rückt die Collineationsaxe in's Unendliche, so werden je zwei homologe Gerade parallel, und die Systeme heissen alsdann perspectivisch ähnlich. Die Lehre von der Aehnlichkeit ebener Figuren ist Ihnen aus der Geometrie der Alten längst bekannt, und also ein besonderer Fall der Lehre von der Collineation.

Zwei collineare ebene Systeme Σ, Σ_1, deren unendlich ferne Geraden einander nicht entsprechen, können auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden. Man bestimme in ihnen zunächst die beiden Gegenaxen; dann entsprechen einander die beiden Parallelstrahlenbüschel von Σ und Σ_1, welchen diese Gegenaxen angehören. Dagegen entsprechen zwei beliebigen anderen Parallelen a, b von Σ allemal zwei nicht parallele Gerade

a_1, b_1 von Σ_1, weil a_1 und b_1 in einem eigentlichen Punkte der Gegenaxe von Σ_1 sich schneiden müssen. Es giebt folglich in einem bestimmten Abstande von dieser Gegenaxe zwei und nur zwei zu ihr parallele Gerade u_1 und v_1, auf welchen durch a_1 und b_1 Strecken von derselben Länge begrenzt werden, wie auf den entsprechenden Geraden u und v durch die Parallelen a und b; die Punktreihen u_1 und v_1 aber sind die einzigen von Σ_1, welche den ihnen entsprechenden Punktreihen u und v projectivisch gleich sind. Werden nun die collinearen Systeme in solche Lage gebracht, dass die Punktreihen u und u_1 (oder auch v und v_1) sich decken und alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch. Sie bleiben perspectivisch, wenn man sie hernach um ihre entsprechend gemeinschaftliche Gerade dreht, bis ihre Ebenen zusammenfallen, und man erhält dann leicht zwei Strahlenbüschel in Σ, welche den entsprechenden Strahlenbüscheln von Σ_1 projectivisch gleich sind (Seite 16).

Zwei collineare ebene Curven, deren unendlich ferne Punkte einander nicht entsprechen, können dem Vorhergehenden zufolge in solche Lage gebracht werden, dass sie als Schnitte einer conischen Fläche erscheinen. Welche Eigenschaften sie mit einander gemein haben, lehrt dann die Anschauung ohne grosse Mühe. — Zwei beliebige Curven II. Ordnung, auf welchen je drei Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 willkürlich angenommen sind, können in solche Lage zu einander gebracht werden, dass durch sie und die drei Geraden $\overline{AA_1}$, BB_1 und $\overline{CC_1}$ eine Kegelfläche II. Ordnung gelegt werden kann (vgl. Seite 10).

Vierter Vortrag.

Collineare und reciproke Verwandtschaft räumlicher Systeme.

Die bisherigen Entwickelungen bieten uns nunmehr die Mittel dar, zwei räumliche Systeme, d. h. Theile des unendlichen Raumes, auf einander, oder den unendlichen Raum auf sich selbst collinear oder reciprok zu beziehen. Aus der allgemeinen Definition der collinearen und der reciproken Verwandtschaft leiten wir zunächst für räumliche Systeme folgende Erklärung ab:

Zwei räumliche Systeme Σ *und* Σ_1 *sind collinear auf einander bezogen, wenn jedem Punkte* P *von* Σ *ein Punkt* P_1 *von* Σ_1 *entspricht, jeder durch* P *gehenden Geraden oder Ebene von* Σ *aber eine durch* P_1 *gehende Gerade resp. Ebene von* Σ_1.

Zwei räumliche Systeme Σ *und* Σ_1 *sind reciprok auf einander bezogen, wenn jedem Punkte* P *von* Σ *eine Ebene* π_1 *von* Σ_1 *entspricht, jeder durch* P *gehenden Geraden oder Ebene von* Σ *aber ein in* π_1 *liegender Strahl resp. Punkt von* Σ_1.

Auch hier beweisen Sie ohne Mühe den schon früher allgemein aufgestellten Satz, dass zwei Grundgebilde, welche einem dritten entweder beide collinear oder beide reciprok sind, zu einander collinear sein müssen. Da hiernach die collineare Verwandtschaft aus der reciproken abgeleitet werden kann, so darf ich mich meistens auf die Untersuchung der letzteren beschränken.

Entsprechen einander in zwei reciproken räumlichen Systemen ein Punkt P und eine Ebene π_1, also auch der Strahlenbündel P und das ebene System π_1, so sind die letzteren reciprok; denn jeder Ebene ε von P entspricht ein Punkt E_1 in π_1, und jedem in ε liegenden Strahl von P entspricht ein durch E_1 gehender Strahl von π_1. Je vier harmonischen Elementen des Bündels P oder überhaupt des einen räumlichen Systems entsprechen daher allemal vier harmonische Elemente in π_1 oder im anderen System. Folglich muss auch jeder Punktreihe des einen Systems ein zu ihr projectivischer Ebenenbüschel des anderen, und jedem Strahlenbüschel ein zu ihm projectivischer Strahlenbüschel entsprechen. In zwei collinearen räumlichen Systemen entspricht ebenso jedem ebenen Systeme ein collineares ebenes System, jedem Strahlenbündel ein collinearer Strahlenbündel, jeder Punktreihe eine zu ihr projectivische Punktreihe u. s. w. Zwei collineare und ebenso zwei reciproke räumliche Systeme werden deshalb auch projectivisch genannt. Es folgt:

Wenn zwei collineare oder reciproke räumliche Systeme drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes, oder auch vier gleichartige Elemente eines Grundgebildes der zweiten Stufe entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element dieses Grundgebildes entsprechend gemein *(Seite 14)*.

Dabei wird vorausgesetzt, dass im letzteren Falle keine drei von jenen vier Elementen einem und demselben einförmigen Grundgebilde angehören.

Um nun zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf einander zu beziehen, verfahren wir wohl am einfachsten und anschaulichsten wie folgt. Wir nehmen in Σ irgend zwei Strahlenbündel A und B an, und beziehen dieselben auf je ein in Σ_1 liegendes ebenes System α_1 resp. β_1 reciprok, so jedoch, dass der Geraden $\overline{AB}$ die Schnittlinie $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ entspricht, sowie jeder durch $\overline{AB}$ gehenden gemeinschaftlichen Ebene der Bündel ein auf $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ liegender gemeinschaftlicher Punkt der ebenen Systeme. Damit ist dann jedem Punkte P von Σ eine Ebene π_1 in Σ_1 zugewiesen, und jedem durch P gehenden Strahle l ein in π_1 liegender Strahl l_1. Denn den Strahlen $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$, welche mit $\overline{AB}$ in einer und derselben Ebene liegen, entsprechen in α_1 und β_1 zwei Strahlen, welche mit $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ einen und denselben Punkt gemein haben und daher eine dem Punkte P entsprechende Ebene π_1 bestimmen; und ebenso entspricht dem Strahle l von Σ, welcher aus A und B durch zwei Ebenen $\overline{Al}$ und $\overline{Bl}$ projicirt wird, ein Strahl l_1, welcher von α_1 und β_1 in den entsprechenden zwei Punkten $\alpha_1 \cdot l_1$ und $\beta_1 \cdot l_1$ geschnitten wird. Ist endlich in Σ irgend ein ebenes System ε gegeben, durch welches die Bündel A und B perspectivisch auf einander bezogen werden, so dass sie also den Ebenenbüschel $\overline{AB}$ entsprechend gemein haben, so werden dadurch gleichzeitig die ebenen Systeme α_1 und β_1 weil $(\alpha_1 \barwedge A \barwedge B \barwedge \beta_1)$ collinear auf einander bezogen, so dass sie die Punktreihe $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ entsprechend gemein haben. Folglich liegen (nach Seite 16) α_1 und β_1 perspectivisch und erzeugen einen Strahlenbündel E_1, welcher dem ebenen Systeme ε entspricht und demselben reciprok ist. Der Ebene ε von Σ, welche durch irgend eine Gerade l oder einen Punkt P hindurchgeht, entspricht somit ein Punkt E_1, welcher auf der entsprechenden Geraden l_1 oder Ebene π_1 liegt. Auch der unendlich fernen Ebene des einen Systems entspricht auf diese Weise ein Punkt des andern, und zwar im Allgemeinen ein eigentlicher Punkt. Also:

„Zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 lassen sich stets auf eine „einzige Art so auf einander beziehen, dass zwei Strahlen-„bündeln A und B von Σ zwei denselben reciproke ebene Sy-„steme α_1 und β_1 von Σ_1 entsprechen, wenn nämlich die reci-„proke Verwandtschaft zwischen A und α_1 und zwischen B „und β_1 so festgestellt ist, dass jeder gemeinschaftlichen Ebene „von A und B ein gemeinschaftlicher Punkt von α_1 und β_1 „entspricht."

Wir können daraus schliessen:

Sollen zwei räumliche Systeme Σ *und* Σ_1 *reciprok auf einander bezogen werden, so darf man fünf beliebigen Punkten* A, B, C, D, E *des ersteren, von denen jedoch keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Ebenen* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ *des letzteren, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, als entsprechende zuweisen, wodurch dann aber jedem Elemente von* Σ *ein solches in* Σ_1 *zugewiesen ist.*

Wir müssen nämlich und können auch auf eine einzige Art den Strahlenbündel A reciprok auf das ebene System α_1 beziehen, so dass den Strahlen $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}$ die resp. Strahlen $\overline{\alpha_1 \beta_1}, \overline{\alpha_1 \gamma_1}, \overline{\alpha_1 \delta_1}, \overline{\alpha_1 \varepsilon_1}$ entsprechen (Seite 7); und ebenso ist zwischen dem Bündel B und dem ebenen System β_1 eine reciproke Verwandtschaft herzustellen, so dass die vier Strahlenpaare $\overline{BA}$ und $\overline{\beta_1 \alpha_1}$, $\overline{BC}$ und $\overline{\beta_1 \gamma_1}$, $\overline{BD}$ und $\overline{\beta_1 \delta_1}$, $\overline{BE}$ und $\overline{\beta_1 \varepsilon_1}$ aus homologen Strahlen bestehen. Weil nun den gemeinschaftlichen drei Ebenen $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$ und $\overline{ABE}$ der Bündel A und B die resp. drei gemeinschaftlichen Punkte $\dot{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}$, $\dot{\alpha_1 \beta_1 \delta_1}$ und $\dot{\alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1}$ der ebenen Systeme α_1 und β_1 entsprechen, so entspricht jeder Ebene des Büschels $\overline{AB}$ ein einziger Punkt der Punkreihe $\overline{\alpha_1 \beta_1}$; der Satz ist also auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Für collineare räumliche Systeme folgt ebenso:

Sollen zwei räumliche Systeme Σ *und* Σ_1 *collinear auf einander bezogen werden, so darf man fünf beliebigen Punkten des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf derselben Bedingung genügende Punkte des andern als entsprechende zuweisen, wodurch dann jedem Elemente von* Σ *ein solches von* Σ_1 *zugewiesen ist.*

Dieser Satz lässt sich entweder direkt beweisen auf analoge Weise, wie vorhin derjenige über reciproke Systeme, oder einfacher noch auf diesen zurückführen durch die Bemerkung, dass zwei Systeme, welche einem dritten reciprok sind, collinear sein müssen. Wir können nämlich beide gegebene Systeme auf ein drittes reciprok beziehen, so dass beliebigen fünf Ebenen des letzteren die resp. fünf gegebenen Punkte von jedem der ersteren entsprechen; dadurch wird die collineare Verwandtschaft zwischen den gegebenen Systemen hergestellt. Statt der fünf Punkte in jedem der beiden Systeme könnten auch je fünf Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, einander zugewiesen werden; auch in diesem Falle gilt der Satz. Zugleich ergiebt sich:

Wenn zwei collineare räumliche Systeme fünf Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, oder auch fünf Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein, und sind identisch.

Als Hauptergebniss dieser ganzen Untersuchung ist der jetzt geführte Beweis des Reciprocitäts-Gesetzes zu betrachten. Wenn nämlich zwei Räume reciprok auf einander bezogen werden können, so kann auch zu jedem beliebigen räumlichen Gebilde ein reciprokes construirt werden, dessen Eigenschaften sich aus denjenigen des ersteren ergeben. Ich werde deshalb künftig mich begnügen, von je zwei reciproken Sätzen nur den einen zu beweisen, empfehle Ihnen jedoch, auch den Beweis des andern manchmal direkt zu führen statt mittelst des Reciprocitäts-Gesetzes.

Zwischen räumlichen Gebilden, z. B. Curven oder Flächen, welche in collinearen oder reciproken Systemen einander entsprechen, bestehen bemerkenswerthe Beziehungen. Dieselben sind namentlich von Interesse bei doppelt gekrümmten oder „gewundenen“ Curven, d. h. bei solchen, von denen kein Stück in einer Ebene liegt. Ehe ich jene Beziehungen nenne, schicke ich über die gewundenen Curven einige Bemerkungen voraus.

Werden irgend zwei Punkte P und Q einer doppelt gekrümmten Curve durch eine Gerade $\overline{PQ}$ verbunden (Fig. 15), und gleitet sodann der eine Q dieser Punkte auf der Curve fort, so beschreibt die Sehne $\overline{PQ}$ eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt P ist, und welche aus diesem Punkte die Curve projicirt. Nähert sich Q mehr und mehr dem festen Punkte P, so nähert sich $\overline{PQ}$ einer festen Geraden p, mit der sie schliesslich zusammenfällt, wenn Q mit P sich vereinigt. Diese Gerade p heisst die „Tangente“ der Curve im Punkte P; und von jeder durch p gehenden Ebene wird gesagt, sie „berühre“ die Curve im Punkte P. Eine Berührungsebene, welche die Tangente p mit einem veränderlichen Punkte R der Curve verbindet, beschreibt einen die Curve projicirenden Ebenenbüschel p, wenn R sich auf der Curve fortbewegt; sie nähert sich einer festen Ebene π, mit der sie schliesslich zusammenfällt, wenn R sich dem Punkte P mehr und mehr nähert. Diese Ebene π heisst die „Schmiegungs-“ oder „Krümmungs-Ebene“ der Curve im Punkte P; sie berührt in der Geraden p die Kegelfläche, durch welche die Curve aus dem Punkte P projicirt wird, weil sie mit der Kegelfläche zwei in p sich vereinigende Strahlen gemein hat. Jede Tangente kann somit aufgefasst werden

als Verbindungslinie von zwei, und jede Schmiegungsebene als Verbindungsebene von drei Punkten der Curve, die einander unbegrenzt sich genähert haben. Umgekehrt fällt die gemeinschaftliche Gerade von zwei sich unbegrenzt einander nähernden Schmiegungsebenen einer Curve mit einer Tangente derselben zusammen, der Schnittpunkt von drei solchen Ebenen aber mit einem Punkte der Curve. Die sämmtlichen Tangenten einer gewundenen Curve bilden einen räumlichen Strahlenbüschel, welcher die Curve „einhüllt", und die sämmtlichen Schmiegungsebenen einen Ebenenbüschel, welcher der Curve sich „anschmiegt".

Wenn ein Punkt P die gewundene Curve, zugleich aber seine Tangente p den sie einhüllenden Strahlenbüschel und seine Schmiegungs-Ebene π den der Curve sich anschmiegenden Ebenenbüschel beschreibt, so bewegt sich P stetig in p, während p in der Ebene π sich um P, und zugleich π sich um p stetig dreht. Jeder Punkt der Curve, bei welchem P den Sinn seiner Bewegung in der Tangente p ändert, heisst ein stationärer oder „Rückkehr-Punkt" der Curve; ebenso heisst jede Tangente oder Schmiegungsebene „stationär", bei welcher p resp. π den Sinn ihrer Drehung um P resp. p ändert.

Sind nun k und k_1 zwei gewundene Curven, welche in collinearen Systemen einander entsprechen, so muss jeder Geraden, welche zwei, und jeder Ebene, welche drei Punkte von k verbindet, eine Gerade resp. eine Ebene entsprechen, welche die homologen zwei resp. drei Punkte von k_1 verbindet. Der Tangente und der Schmiegungsebene eines beliebigen Punktes von k entspricht daher auch die Tangente resp. Schmiegungsebene des homologen Punktes von k_1. Beschreibt ein Punkt P die Curve k, während zugleich seine Tangente p den einhüllenden Strahlenbüschel von k und seine Schmiegungsebene π den Ebenenbüschel beschreibt, welcher der Curve k sich anschmiegt, so durchläuft gleichzeitig der entsprechende Punkt P_1 die Curve k_1, die entsprechende Tangente p_1 beschreibt den einhüllenden Strahlenbüschel von k_1 und die entsprechende Schmiegungsebene π_1 den Ebenenbüschel, welcher der Curve k_1 sich anschmiegt. Jedem stationären Elemente von k entspricht ein stationäres Element gleicher Art von k_1. Ist die Curve k „von der $n$ten Ordnung", d. h. hat sie mit einer beliebigen Ebene im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein, so ist auch die Curve k_1 von der $n$ten Ordnung; denn sie hat mit der homologen Ebene die entsprechenden Punkte gemein.

Wenn anderseits k „von der $m$ten Classe" ist, d. h. wenn durch einen beliebigen Punkt im Allgemeinen und höchstens m Schmiegungsebenen der Curve k gehen, so ist auch k_1 von der $m$ten Classe. Den unendlich fernen Punkten von k entsprechen im Allgemeinen eigentliche Punkte von k_1, weil nur in besonderen Fällen der unendlich fernen Ebene des einen Systems die unendlich ferne Ebene des andern entspricht.

Wenn die Curve k nach einem beliebigen Gesetze sich stetig bewegt, und eine Fläche Φ beschreibt, so beschreibt zugleich k_1 eine Fläche Φ_1, welche jener entspricht. Diese Flächen werden von je zwei einander entsprechenden Schnittebenen in collinearen Curven geschnitten; und wenn Φ „von der $n$ten Ordnung" ist, d. h. mit einer beliebigen Geraden im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat, so ist auch Φ_1 von der $n$ten Ordnung, weil Φ_1 mit der entsprechenden Geraden die entsprechenden Punkte gemein hat. Jeder Tangente von Φ entspricht eine Tangente von Φ_1, und ebenso entsprechen die Berührungsebenen der beiden collinearen Flächen einander. Wenn Φ „von der $m$ten Classe" ist, d. h. wenn durch eine beliebige Gerade im Allgemeinen und höchstens m Berührungsebenen dieser Fläche gehen, so ist deshalb auch die andere Fläche Φ_1 von der $m$ten Classe. Ordnung und Classe einer Raumcurve oder Fläche gehören demnach zu den invarianten Eigenschaften derselben. — Enthält die eine Fläche gerade Linien, so enthält die andere ebenso viele gerade Linien; hat die eine Fläche Doppelpunkte oder Doppelcurven, durch welche sie mehr als einmal hindurchgeht, so gilt dasselbe von der anderen; u. s. w. Dagegen können collineare Flächen sich wesentlich unterscheiden hinsichtlich ihrer unendlich fernen Punkte. So kann die eine Fläche von der unendlich fernen Ebene in einer Curve geschnitten werden, während die andere von der unendlich fernen Ebene in einem Punkte berührt oder auch gar nicht getroffen wird.

Sind zwei räumliche Systeme reciprok auf einander bezogen, so entspricht ebenfalls jeder gewundenen Curve k des einen eine gewundene Curve k_1 des andern; jedoch so: Jedem Punkte P von k entspricht eine Schmiegungsebene π_1 von k_1, jeder Tangente, welche zwei, und jeder Schmiegungsebene, welche drei einander unbegrenzt sich nähernde Punkte von k verbindet, entspricht eine Tangente von k_1, in welcher zwei, resp. ein Punkt, in welchen drei einander unbegrenzt sich nähernde Schmiegungsebenen

von k_1 sich schneiden. Jeder Ebene, welche von der einen Curve n Punkte oder n Tangenten enthält, entspricht ein Punkt, durch welchen n Schmiegungsebenen resp. n Tangenten der anderen Curve hindurchgehen; die Ordnung (oder Classe) der einen Curve ist deshalb gleich der Classe (resp. Ordnung) der andern. Jedem stationären Punkte der einen Curve entspricht eine stationäre Schmiegungsebene der andern. Den sämmtlichen Punkten einer ebenen Curve nebst deren Tangenten entsprechen die sämmtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche nebst deren Strahlen. — Den Punkten und Tangenten einer Fläche Φ entsprechen die Berührungsebenen und Tangenten einer Fläche Φ_1, und den Berührungsebenen von Φ entsprechen die Punkte von Φ_1, u. s. w.

Sollen zwei räumliche Systeme projectivisch auf einander bezogen werden, sodass zwei projectivische Regelschaaren $abcd\ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$ einander als homologe Gebilde entsprechen, so kann man drei beliebigen Leitstrahlen p, q, r der einen Regelschaar irgend drei Leitstrahlen p_1, q_1, r_1 der andern als entsprechende zuweisen und ausserdem noch festsetzen, ob die räumlichen Systeme collinear oder reciprok sein sollen. Bezieht man nämlich die beiden Systeme projectivisch so auf einander, dass den fünf Punkten ap, aq, bp, bq, cr des einen die fünf Punkte (oder Ebenen) a_1p_1, a_1q_1, b_1p_1, b_1q_1, c_1r_1 des andern entsprechen, so entsprechen den Geraden a, b, p, q des ersteren Systems die Geraden a_1, b_1, p_1, q_1 des letzteren. Ferner entspricht der Geraden c, welche durch den Punkt cr geht und die Geraden p und q schneidet, die Gerade c_1, welche durch den Punkt c_1r_1 geht (in der Ebene c_1r_1 liegt) und die Geraden p_1 und q_1 schneidet; und ebenso entspricht der Geraden r die Gerade r_1. Endlich entspricht jedem Strahle d der Regelschaar abc ein Strahl d_1 der Regelschaar d_1, sodass die beiden einförmigen Grundgebilde $p(abcd)$ und $p_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$ projectivisch sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Erzeugnisse collinearer und reciproker Systeme werden wir in den späteren Vorträgen untersuchen. An dieser Stelle aber möchte ich Sie noch mit der perspectivischen Lage von collinearen räumlichen Systemen bekannt machen. Da zwei collineare Räume sich gegenseitig durchdringen, so können einzelne oder unendlich viele Elemente des einen mit den entsprechenden des andern zusammenfallen; die Systeme können einzelne Elemente und sogar Grundgebilde der ersten oder der zweiten Stufe ent-

sprechend gemein haben. Analoge Betrachtungen, wie die früheren über collineare Systeme, die in derselben Ebene liegen, führen uns zu folgendem Satze:

Wenn zwei collineare räumliche Systeme ein ebenes System σ entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbündel S *entsprechend gemein*; *und umgekehrt.*

Nämlich je zwei einander entsprechende ebene Systeme α und α_1 der collinearen Räume sind ebenfalls collinear (Seite 20); ihre Ebenen schneiden sich in einer Geraden von σ, und sie haben jeden Punkt dieser Schnittlinie entsprechend gemein, weil jedes Element von σ mit seinem entsprechenden zusammenfällt; sie sind folglich perspectivisch, und Schnitte eines Strahlenbündels S. Weil nun jedes Element von S, sei es ein Strahl oder eine Ebene, ein sich selbst entsprechendes Element von σ mit zwei einander entsprechenden Elementen von α und α_1 verbindet, so muss es sich selbst entsprechen; so dass je zwei homologe Punkte der räumlichen Systeme mit S in einer Geraden, und je zwei homologe Gerade mit S in einer Ebene liegen, die letzteren aber sich ausserdem in einem Punkte von σ scheiden. — Haben anderseits die räumlichen Systeme einen Strahlenbündel S entsprechend gemein, so liegen je zwei homologe Strahlenbündel A und A_1 perspectivisch. Denn weil der Strahl $\overline{AA_1}$ durch S geht, so haben diese collinearen Bündel nicht nur diesen Strahl, sondern auch jede durch ihn gehende Ebene entsprechend gemein, und sind daher Scheine eines ebenen Systems σ. In jedem Element von σ aber wird ein Element von S, welches sich selbst entspricht, geschnitten von zwei homologen Elementen der Bündel A und A_1; folglich fallen alle Elemente von σ mit ihren entsprechenden zusammen.

Zwei collineare räumliche Systeme, welche einen Strahlenbündel S und ein ebenes System σ entsprechend gemein haben, werden „perspectivisch" genannt. Der Punkt S, welcher mit je zwei homologen Punkten in einer Geraden und mit je zwei homologen Strahlen der Systeme in einer Ebene liegt, heisst das „Collineations-Centrum", und die Ebene σ, auf welcher je zwei homologe Strahlen oder Ebenen sich schneiden, die „Collineations-Ebene" der räumlichen Systeme. Sollen zwei räumliche Systeme perspectivisch auf einander bezogen werden, so kann man die Ebene σ und das Centrum S der Collineation willkürlich annehmen, und ausserdem irgend zwei Punkte A und A_1 einander als ent-

sprechende zuweisen, welche mit S in einer Geraden, jedoch ausserhalb σ liegen. Denn seien B, C, D drei Punkte von σ, von deren drei Verbindungslinien keine die Gerade $\overline{SAA_1}$ schneidet, so können die räumlichen Systeme collinear so auf einander bezogen werden, dass den fünf Punkten A, B, C, D, S des einen die resp. fünf Punkte A_1, B, C, D, S des andern entsprechen. Die Strahlen $\overline{SAA_1}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ und folglich alle Elemente des Bündels S entsprechen sich selbst; ebenso entspricht die Ebene $\overline{BCD}$ oder σ sich selbst, sowie jedes Element derselben, weil ausser den Punkten B, C, D noch ein auf $\overline{SAA_1}$ liegender Punkt von σ sich selbst entspricht (Seite 14).

In perspectivischen räumlichen Systemen kann mit grosser Leichtigkeit zu jedem Gebilde das entsprechende construirt werden auf dieselbe Art, wie ich es bei perspectivischen Systemen, die in einer Ebene liegen, gezeigt habe. Ein besonderer Fall, der hier eintreten kann, ist derjenige, in welchem die Collineations-Ebene unendlich fern liegt, so dass je zwei homologe Gerade oder Ebenen parallel sind. In diesem Falle werden die Systeme auch wohl perspectivisch „ähnlich" genannt. Die Stereometrie wird Sie bereits mit solchen ähnlichen Systemen bekannt gemacht haben; eine Maschine z. B. und ein getreues Modell derselben können als Theile ähnlicher Systeme angesehen, und in die perspectivische Lage gebracht werden, so dass die Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten sich in einem festen Punkte, dem Collineations-Centrum schneiden, und je zwei homologe Strahlen oder Ebenen parallel sind. — Zwei collineare Räume können im Allgemeinen nicht in perspectivische Lage gebracht werden.

Fünfter Vortrag.

Flächen zweiter Ordnung, deren Erzeugung und Classificirung.

Wie wir durch projectivische einförmige Grundgebilde zu den Elementargebilden zweiter Ordnung geführt worden sind, ebenso führen uns die projectivischen Grundgebilde zweiter Stufe zu den Flächen und Ebenenbündeln zweiter Ordnung. Nämlich:

Eine Fläche zweiter Ordnung wird erzeugt durch zwei reciproke Strahlenbündel, welche nicht concentrisch liegen; jeder Strahl des einen Bündels wird von der ihm entsprechenden Ebene des andern in einem Punkte der Fläche geschnitten.

Ein Ebenenbündel zweiter Ordnung wird erzeugt durch zwei reciproke ebene Systeme, welche nicht in derselben Ebene liegen; jeder Strahl des einen Systems wird aus dem ihm entsprechenden Punkte des andern durch eine Ebene des Bündels projicirt.

Da die Fläche II. Ordnung und der Ebenenbündel II. Ordnung reciproke Gebilde sind, so ergeben sich mittelst des Gesetzes der Reciprocität alle Eigenschaften des einen dieser beiden Gebilde sofort aus denjenigen des andern, und wir dürfen uns daher auf die Untersuchung der Fläche II. Ordnung beschränken. Später wird sich herausstellen, dass der Ebenenbündel II. Ordnung aus den sämmtlichen Berührungsebenen einer Fläche II. Ordnung besteht; so dass auch abgesehen vom Reciprocitäts-Gesetze die Theorie der Ebenenbündel in derjenigen der Flächen II. Ordnung enthalten ist.

Seien S und S_1 die Mittelpunkte der beiden reciproken Strahlenbündel, durch welche eine Fläche F^2 II. Ordnung erzeugt wird; dann lässt sich zunächst leicht erkennen, dass jede durch S gelegte Ebene α von der Fläche in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird. Und zwar enthält diese Curve den Punkt S sowie denjenigen Punkt, in welchem die Ebene α von dem ihr entsprechenden Strahle a_1 des Bündels S_1 geschnitten wird, und kann in besonderen Fällen in ein System von zwei Geraden zerfallen. Nämlich dem Strahlenbüschel von S, welcher in der Ebene α liegt, entspricht ein ihm projectivischer Ebenenbüschel von S_1, dessen Axe die Gerade a_1 ist. Diese projectivischen Büschel aber erzeugen die Curve II. Ordnung, welche die Ebene α mit der Fläche F^2 gemein hat, und welche nur dann in zwei gerade Linien zerfällt, wenn irgend ein Strahl des Büschels α in der ihm entsprechenden Ebene von a_1 liegt. Die Curve II. Ordnung wird auch erzeugt durch zwei projectivische Strahlenbüschel, von welchen der eine der vorhingenannte Strahlenbüschel S in α, der andern aber ein Schnitt des Ebenenbüschels a_1 mit der Ebene α ist, und diese Büschel haben nur in jenem besonderen Fall perspectivische Lage. Hieraus ersehen Sie, dass die Schnittcurve von F^2 und α auch durch die Punkte S und $a_1 \alpha$ hindurchgeht. — Ebenso wird die

Fläche II. Ordnung von jeder durch S_1 gehenden Ebene in einer Curve II. Ordnung geschnitten, welche auch den Punkt S_1 enthält.

Es folgt hieraus, dass die Fläche F^2 mit keiner Geraden g, die nicht ganz auf ihr liegt, mehr als zwei Punkte gemein haben kann; denn die Curve II. Ordnung, in welcher die Fläche von der Ebene Sg geschnitten wird, kann mit der Geraden g höchstens zwei Punkte gemein haben. Die Fläche ist also wirklich von der zweiten Ordnung. Jede durch S gehende Gerade g hat mit der Fläche im Allgemeinen noch einen von S verschiedenen Punkt gemein, in welchem sie nämlich von der ihr entsprechenden Ebene γ_1 geschnitten wird; und nur dann fällt dieser zweite Schnittpunkt mit S zusammen, wenn γ_1 durch den gemeinschaftlichen Strahl $\overline{S_1 S}$ der Bündel hindurchgeht. Wir wollen jeden Strahl von S, welcher mit der Fläche II. Ordnung keinen von S verschiedenen Punkt gemein hat, eine „Tangente" der Fläche im Punkte S nennen. Da jeder Tangente eine durch $\overline{SS_1}$ gelegte Ebene entspricht, so liegen alle durch S gehenden Tangenten der Fläche in derjenigen Ebene des Bündels S, welche dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ entspricht; und diese Ebene soll die „Berührungs-Ebene" der Fläche F^2 im Punkte S genannt werden. Also:

„Dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{SS_1}$ der Bündel entspricht „sowohl in S als auch in S_1 eine Berührungsebene der Fläche „II. Ordnung."

Sind nun auch in anderen Punkten der Fläche solche Berührungsebenen möglich? und hat die Fläche auch mit solchen Schnittebenen, die nicht durch S oder S_1 gehen, Curven II. Ordnung gemein? Diese Fragen drängen sich uns jetzt auf, und Sie werden gewiss geneigt sein, die letztere Frage zu bejahen, wenn Sie berücksichtigen, dass keine ebene Schnittcurve der Fläche von einer Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen werden kann. Auch wissen wir bereits, dass durch jeden Punkt P einer Fläche II. Ordnung mindestens zwei Schaaren von Kegelschnitten, die auf der Fläche liegen, hindurchgehen müssen; denn jede Ebene der beiden Ebenenbüschel, deren Axen den Punkt P mit den Mittelpunkten S und S_1 der reciproken Strahlenbündel verbinden, hat einen Kegelschnitt mit der Fläche II. Ordnung gemein. Wir finden wirklich eine bejahende Antwort für die aufgeworfenen Fragen, indem wir zeigen:

Jeder beliebige Punkt einer gegebenen Fläche II. Ordnung kann zum Mittelpunkt des einen von zwei reciproken Strahlenbündeln gewählt werden, welche die Fläche erzeugen.

Seien S und S_1 die Mittelpunkte derjenigen reciproken Strahlenbündel, durch welche die gegebene Fläche II. Ordnung F^2 ursprünglich erzeugt worden ist, und sei S_2 ein beliebiger dritter Punkt von F^2; dann gilt es, die Strahlenbündel S und S_2 in solcher Weise reciprok auf einander zu beziehen, dass auch sie die Fläche erzeugen. Werden die Bündel S und S_2 in ganz beliebiger Weise reciprok auf einander bezogen, so erzeugen sie eine zweite Fläche F_1^2 II. Ordnung, welche durch die Punkte S und S_2 hindurchgeht. Ich werde nun die reciproke Verwandtschaft zwischen S und S_2 so herstellen, dass F_1^2 noch zwei Kegelschnitte mit F^2 gemein hat, welche durch S, nicht aber durch S_2 gehen; und sodann werde ich nachweisen, dass F^2 und F_1^2 mit allen ihren Punkten zusammenfallen, also identisch sind.

Die gegebene Fläche F^2 schneide ich durch zwei Ebenen, welche den Punkt S, nicht aber S_2 enthalten, in zwei Kegelschnitten $\varkappa$ und λ (Fig. 5). Sei T der Punkt, in welchem die Schnittlinie der beiden Ebenen zum zweiten Male von der Fläche getroffen wird, sei also $\overline{ST}$ die gemeinschaftliche Sehne der Kegelschnitte $\varkappa$ und λ, welche auch zu einer gemeinschaftlichen Tangente werden kann, wenn T sich dem Punkte S unbegrenzt nähert. Damit dann zunächst T auf der von den Bündeln S und S_2 erzeugten Fläche F_1^2 liege, muss dem Strahle $\overline{ST}$ von S eine beliebige durch T gehende Ebene $\overline{S_2KL}$ von S_2 entsprechen. Diese Ebene schneide den Kegelschnitt $\varkappa$ zum zweiten Male in einem Punkte K und ebenso λ in einem Punkte L; dann können wir die verlangte reciproke Verwandtschaft zwischen den Strahlenbündeln S und S_2 folgendermaassen feststellen. Wir projiciren die Curve II. Ordnung $\varkappa$ aus dem Punkte S durch einen Strahlenbüschel $S\varkappa$ und aus der Axe $\overline{S_2K}$ durch einen Ebenenbüschel; der letztere ist dadurch projectivisch auf den Strahlenbüschel bezogen. Ebenso projiciren wir die Curve λ aus S durch einen Strahlenbüschel $S\lambda$ und aus $\overline{S_2L}$ durch einen Ebenenbüschel, welcher letztere dann zu dem Strahlenbüschel projectivisch ist. Da nun der gemeinschaftlichen Ebene $\overline{S_2KL}$ der Ebenenbüschel, durch welche der Schnittpunkt T der Kegelschnitte projicirt wird, der gemeinschaftliche Strahl $\overline{ST}$ der beiden Strahlenbüschel entspricht, so sind hiedurch (nach Seite 6) die Strahlenbündel S und S_2 reciprok auf einander bezogen. Und die Fläche F_1^2, welche durch diese Bündel erzeugt wird, geht nicht nur durch S und S_2, sondern auch durch den Kegelschnitt $\varkappa$, weil dieser durch den Strahlenbüschel $S\varkappa$ und den

ihm entsprechenden Ebenenbüschel $\overline{S_2 K}$ erzeugt wird, und ebenso durch den Kegelschnitt λ. — Beiläufig folgt aus dieser Construction:

„Durch zwei gegebene Kegelschnitte $\varkappa$ und λ, welche in „verschiedenen Ebenen liegen, aber sich entweder in zwei „Punkten S und T schneiden oder in einem Punkte S berühren, „und durch einen ausserhalb ihrer Ebenen liegenden Punkt „S_2 kann eine Fläche II. Ordnung gelegt werden."

Mehr als eine solche Fläche II. Ordnung ist nicht möglich; denn zwei Flächen wie F^2 und F_1^2, welche beide durch $\varkappa$, λ und S_2 gehen, sind identisch, wie aus Folgendem sich ergiebt. Zunächst schneidet jede durch S_1 und S_2 gelegte Ebene, welche von $\varkappa$ und λ je zwei Punkte enthält, die Flächen in zwei Kegelschnitten, welche mit allen ihren Punkten zusammenfallen, weil sie ausser S_2 noch jene vier, auf $\varkappa$ und λ liegenden Punkte gemein haben (I. Abth. Seite 63); solche Schnittebenen sind aber stets möglich, wenn nur $\varkappa$ und λ von vornherein passend auf der Fläche F^2 gewählt werden. Sei nun μ ein durch S_1 und S_2 gehender Kegelschnitt, welcher beiden Flächen II. Ordnung angehört, aber nicht durch den Punkt S gehen möge; sei ferner P ein beliebiger Punkt der einen Fläche. Dann schneidet die Ebene $\overline{SPS_1}$ (und ebenso $\overline{SPS_2}$) die beiden Flächen II. Ordnung in zwei Kegelschnitten, welche ausser S und S_1 (resp. S und S_2) noch drei Punkte mit einander gemein haben, nämlich noch je einen Punkt der Kegelschnitte $\varkappa$, λ und μ. Da folglich diese beiden Kegelschnitte zusammenfallen, so liegt jeder Punkt P der einen Fläche auch auf der andern; w. z. b. w.

Es folgt, dass auch in S_2 eine Berührungsebene der Fläche F^2 vorhanden ist, und dass jede andere durch S_2 gelegte Ebene mit F^2 einen Kegelschnitt gemein hat, der unter Umständen auch in ein System von zwei Geraden ausarten kann. Da nun S_2 ein ganz beliebiger Punkt der Fläche ist, so haben wir folgende Haupteigenschaft der Flächen II. Ordnung bewiesen:

Eine Fläche II. Ordnung kann mit einer beliebigen Ebene nur einen Kegelschnitt gemein haben, welcher auch in zwei Gerade zerfallen kann. In jedem ihrer Punkte wird die Fläche von einer Ebene berührt, welche alle in diesem Punkte möglichen Tangenten der Fläche enthält.

Noch auf einen Umstand mache ich Sie aufmerksam. Um zu zeigen, dass durch $\varkappa$, λ und S_2 eine Fläche II. Ordnung gelegt

werden könne, haben wir die Strahlenbündel S und S_2 reciprok auf einander bezogen, und zwar wiesen wir zunächst dem Strahle $\overline{ST}$ eine ganz beliebige durch T gehende Ebene $\overline{S_2 KL}$ zu. Wir können folglich durch Aenderung dieser Ebene auf unendlich viele verschiedene Arten die Bündel S und S_1 reciprok auf einander beziehen, so dass sie die verlangte Fläche erzeugen; oder:

„Zwei Strahlenbündel, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen „Fläche II. Ordnung liegen, können auf unendlich viele Arten „reciprok so auf einander bezogen werden, dass sie die Fläche „II. Ordnung erzeugen."

Die vorhin bewiesene Haupteigenschaft der Flächen II. Ordnung wollen wir zunächst zu einer Classificirung dieser Flächen benutzen. Wir unterscheiden geradlinige Flächen II. Ordnung, welche durch eine gerade Linie beschrieben werden können, und solche, in denen keine gerade Linien enthalten sind. Wenn nämlich eine Fläche II. Ordnung eine Gerade g enthält, so hat sie mit jeder durch g gelegten Schnittebene noch eine zweite Gerade l gemein; denn der Kegelschnitt, in welchem sie von der Ebene getroffen wird, zerfällt alsdann in zwei Gerade. Wenn aber die Schnittebene um g sich dreht, so durchläuft jene zweite Gerade l die Fläche. Die geradlinigen Flächen II. Ordnung sind nun keine anderen, als die uns bereits bekannten Regelflächen und Kegelflächen II. Ordnung. Entweder nämlich schreitet die bewegliche Gerade l so fort, dass keine ihrer Lagen von einer früheren geschnitten wird, oder es giebt zwei Lagen l_1 und l_2 derselben, welche sich schneiden. Im letzteren Falle kann der Schnittpunkt M von l_1 und l_2 (Fig. 6) nur auf der Geraden g liegen, weil die Ebenen $\overline{gl_1}$ und $\overline{gl_2}$ von einander verschieden sind. Seien nun A und B irgend zwei Punkte der Fläche, welche auf keiner der Geraden g, l_1, l_2 liegen, und möge die Fläche II. Ordnung von zwei beliebigen, durch A und B gehenden Ebenen in den Kegelschnitten $\varkappa$ und λ getroffen werden. Dann sind die beiden Kegelflächen, durch welche $\varkappa$ und λ aus dem Punkte M projicirt werden, identisch, weil sie die fünf Strahlen MA, MB, g, l_1, l_2 gemein haben; und jeder Strahl derselben gehört der gegebenen Fläche II. Ordnung an, weil er drei Punkte derselben enthält, nämlich ausser M noch je einen Punkt der Kegelschnitte $\varkappa$ und λ. Also in diesem Falle ist die Fläche eine Kegelfläche II. Ordnung.

Wenn anderseits keine Lage der beweglichen Geraden l von einer früheren geschnitten wird, so greifen wir drei beliebige

Lagen l_1, l_2, l_3 derselben heraus. Jede vierte Gerade, welche von l_1, l_2 und l_3 geschnitten wird, gehört dann ebenfalls der Fläche II. Ordnung an, weil sie die drei Schnittpunkte mit ihr gemein hat, und die Fläche wird auch beschrieben, indem eine bewegliche Gerade an den drei Geraden l_1, l_2, l_3 hingleitet. Also ist die Fläche II. Ordnung in diesem Falle eine Regelfläche, d. h. entweder ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Diejenigen Flächen II. Ordnung, auf welchen keine geraden Linien liegen, werden eingetheilt in „Ellipsoide“, „elliptische Paraboloide“ und „zweifache oder zweischalige Hyperboloide“. Das Ellipsoid hat mit der unendlich fernen Ebene keinen Punkt gemein; das elliptische Paraboloid wird von derselben in einem Punkte berührt, das zweifache Hyperboloid dagegen in einer Curve II. Ordnung geschnitten. Besondere Fälle dieser Flächenarten erhalten Sie durch Rotation eines Kegelschnittes um eine seiner Axen; nämlich die Ellipse beschreibt bei einer solchen Drehung ein Rotations-Ellipsoid, die Parabel ein Rotations-Paraboloid, und die Hyperbel, wenn sie sich um ihre Hauptaxe dreht, ein zweifaches Rotations-Hyperboloid. Dagegen wird von der Hyperbel ein einfaches Rotations-Hyperboloid beschrieben, wenn sich dieselbe um ihre Nebenaxe dreht.

Das Ellipsoid hat zufolge seiner Definition mit jeder Schnittebene eine Ellipse gemein. Das elliptische Paraboloid wird von einer Ebene nur dann in einer Parabel geschnitten, wenn diese Ebene die Richtung enthält, in welcher der unendlich ferne Punkt des Paraboloides liegt; sonst in einer Ellipse. Ebenso haben wir gesehen (I. Abth. Seite 101), dass das hyperbolische Paraboloid mit jeder Ebene eine Hyperbel gemein hat, welche auch in zwei Gerade zerfallen kann, und ausnahmsweise nur dann eine Parabel, wenn die Ebene nach dem Berührungspunkte der unendlich fernen Ebene und des Paraboloides hinläuft. Das einfache und das zweifache Hyperboloid haben mit einer Schnittebene eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemein, je nachdem die Ebene keinen, oder einen Punkt, oder zwei Punkte der unendlich fernen Curve des Hyperboloides enthält; auch kann bei dem einfachen Hyperboloid die Schnittlinie in zwei Gerade zerfallen.

Ob die Fläche II. Ordnung, welche von zwei beliebigen reciproken Strahlenbündeln S und S_1 erzeugt wird, geradlinig ist oder nicht, lässt sich zum Voraus leicht daraus bestimmen, dass

jede Berührungsebene einer geradlinigen Fläche II. Ordnung mit dieser eine oder zwei Gerade gemein hat. Nun entspricht dem Strahle $\overline{SS_1}$ des Bündels S die Berührungsebene im Punkte S_1, und den sämmtlichen Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ entsprechen die sämmtlichen Tangenten in S_1. Wenn nun zwei Strahlen dieses Tangentenbüschels in den ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ liegen, so hat die Berührungsebene diese zwei Strahlen mit der Fläche II. Ordnung gemein, und die Fläche ist eine Regelfläche. Tritt dasselbe nur für einen Strahl ein, so haben wir eine Kegelfläche; und wenn gar kein Strahl des Tangentenbüschels in seiner entsprechenden Ebene liegt, so ist die Fläche II. Ordnung keine geradlinige. Sollte der ganz besondere Fall eintreten, dass drei und folglich alle Ebenen des Büschels $\overline{SS_1}$ durch die ihnen entsprechenden Strahlen von S_1 gehen, so zerfällt die Fläche II. Ordnung in zwei Ebenen; wie schon daraus hervorgeht, dass alsdann jeder Kegelschnitt, welchen die Fläche mit einer beliebigen Ebene gemein hat, in zwei Gerade zerfallen muss.

Sechster Vortrag.

Polarität der Flächen zweiter Ordnung. Durchmesser, Mittelpunkt und Hauptaxen derselben.

Wie die Curven II. Ordnung, so besitzen auch die Flächen II. Ordnung gewisse Eigenschaften, welche gewöhnlich mit dem Namen „Polarität" bezeichnet werden. Dieselben lassen sich mittelst der Sätze des fünften Vortrages leicht ableiten. Wir wollen übrigens im Folgenden die Kegelflächen II. Ordnung ausschliessen, weil für sie die Eigenschaften der Polarität gleichzeitig mit denjenigen der Curven II. Ordnung bereits aufgestellt wurden (I. Abth. Seite 86).

Sei A ein beliebiger Punkt im Raume, welcher nicht auf der gegebenen Fläche II. Ordnung F^2 liegen möge. Wir legen durch A beliebige Secanten an die Fläche, und bestimmen auf jeder derselben denjenigen Punkt, welcher von A durch die beiden Schnittpunkte mit der Fläche harmonisch getrennt ist. Dann müssen alle diese vierten harmonischen Punkte in einer Ebene α liegen.

Denn der geometrische Ort dieses vierten harmonischen Punktes hat mit jeder Ebene, welche durch A geht und die Fläche F^2 in einer Curve II. Ordnung schneidet, eine Gerade gemein, nämlich die Polare des Punktes A in Bezug auf jene Curve II. Ordnung; und da diese Geraden, welche sich paarweise schneiden, nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen sie alle in einer und derselben Ebene α. Diese Ebene enthält auch den Berührungspunkt jeder Tangente, welche von A an eine der Curven II. Ordnung gelegt werden kann, sowie den Schnittpunkt von je zwei Tangenten der Curve, deren Berührungspunkte mit A in einer Geraden liegen (vergl. I. Abth. Seite 78). Hieraus ergiebt sich, dass auf der Ebene α je zwei Berührungsebenen der Fläche sich schneiden, deren Berührungspunkte mit A in einer Geraden liegen; denn die Tangenten, welche in diesen Berührungsebenen enthalten sind, schneiden sich paarweise in Punkten von α.

Wir wollen die Ebene α die „Polarebene" oder „Polare" des Punktes A nennen und umgekehrt A den „Pol" der Ebene α. Die Polare eines beliebigen Punktes wird also durch folgende Eigenschaften der Fläche II. Ordnung bestimmt, von denen jede auch als Definition der Polare betrachtet und zur Construction derselben benutzt werden kann:

„Werden an eine Fläche II. Ordnung durch einen beliebigen „Punkt A, welcher nicht auf der Fläche liegt, Secanten und „Schnittebenen gelegt, und bestimmt man:

„1) diejenigen Punkte der Secanten, welche durch die Fläche „harmonisch von A getrennt sind,

„2) die Polaren von A in Bezug auf die Kegelschnitte, welche „die Fläche II. Ordnung mit den Schnittebenen gemein hat,

„3) die Schnittlinien von je zwei Ebenen, welche die Fläche „in zwei auf einer Secante gelegenen Punkten berühren,

„4) die Berührungspunkte sämmtlicher Tangenten und Be-„rührungsebenen der Fläche, welche durch A gehen,

„so liegen alle diese Punkte und Geraden auf einer Ebene „α, welche die Polare von A genannt wird, und von welcher „A der Pol ist."

Während also die Tangenten, welche durch einen auf der Fläche gegebenen Punkt an dieselbe gelegt werden können, einen Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, so ergiebt sich für einen beliebigen Punkt A, welcher nicht auf der Fläche liegt, und dessen Polare die Fläche schneidet, Folgendes:

„Die Berührungspunkte sämmtlicher Tangenten und Be-
„rührungsebenen, welche aus einem beliebigen Punkte A an
„die Fläche II. Ordnung gelegt werden können, liegen auf
„einem Kegelschnitt, und folglich liegen die Tangenten selbst
„in einer Kegelfläche II. Ordnung, welche von den Berührungs-
„ebenen umhüllt wird.“

Der im Satze angeführte Kegelschnitt nämlich ist derjenige, welchen die Polare des Punktes A mit der Fläche II. Ordnung gemein hat. Es ist einleuchtend, dass umgekehrt jede Gerade, welche irgend einen Punkt P dieses Kegelschnittes mit A verbindet, im Punkte P die Fläche II. Ordnung berührt; denn schnitte sie die Fläche in noch einem zweiten Punkte Q, so würde der Punkt, welcher von A durch P und Q harmonisch getrennt ist, ausserhalb der Polare des Punktes A liegen, weil P in derselben liegt. Jede Ebene, welche aus A eine Tangente des Kegelschnittes projicirt, ist folglich eine Berührungsebene der Fläche. Weil eine beliebig durch A gelegte Gerade höchstens zwei Tangenten jenes Kegelschnittes schneidet, so erhalten wir noch den Satz:

„Durch eine Gerade, welche nicht ganz der Fläche II. Ordnung
„angehört, lassen sich höchstens zwei Berührungsebenen an
„die Fläche legen; die Fläche ist folglich von der zweiten
„Classe.“

Durch eine beliebige Fläche II. Ordnung ist jedem nicht auf der Fläche gelegenen Punkte eine Polarebene zugewiesen. Wir wollen jetzt für den bisher ausgeschlossenen Grenzfall festsetzen, dass jedem Punkte, welcher auf der Fläche liegt, seine Berührungsebene als Polare entsprechen soll und dass umgekehrt jede Berührungsebene der Fläche ihren Berührungspunkt zum Pol haben soll. Dann giebt uns der folgende Satz Aufschluss darüber, in welcher Weise das Entsprechen von Punkten und Ebenen stattfindet:

Liegt von zwei Punkten A, B der erste auf der Polare des zweiten, so liegt auch der zweite auf der Polare des ersten.

Geht von zwei Ebenen die erste durch den Pol der zweiten, so geht auch die zweite durch den Pol der ersten.

Schneiden wir nämlich die Fläche II. Ordnung durch eine Ebene, welche die Punkte A und B enthält, und construiren zu jedem der beiden Punkte die Polare in Bezug auf die Schnittcurve, so geht nach der Annahme die Polare von B durch den Punkt A und folglich (I. Abth. Seite 80) die Polare von A durch

den Punkt B. Die Polare von A in Bezug auf jene Schnittcurve ist aber enthalten in der Polarebene von A bezüglich der Fläche II. Ordnung, und folglich liegt B in dieser Polarebene. — Der Satz rechts ist nur eine Wiederholung des Satzes links.

Bewegt sich also ein Punkt in einer Ebene, so dreht sich zugleich seine Polare um den Pol dieser Ebene; und dreht sich eine Ebene um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol in der Polarebene dieses Punktes. Wir schliessen daraus:

Wenn sich ein Punkt in einer Geraden, also in zwei Ebenen zugleich bewegt, so dreht sich seine Polare um eine Gerade; denn sie dreht sich um die Pole beider Ebenen und folglich um die Verbindungslinie dieser Pole.

Wenn sich eine Ebene um eine Gerade, also um zwei Punkte der Geraden zugleich dreht, so bewegt sich ihr Pol in einer Geraden; denn er bewegt sich in den Polaren beider Punkte und folglich in der Schnittlinie dieser Polaren.

Von zwei Geraden soll jede die „Polare" der andern genannt werden, wenn die Polarebene jedes Punktes der einen Geraden durch die andere hindurchgeht und umgekehrt der Pol von jeder Ebene der einen Geraden auf der andern liegt. Durch die Fläche II. Ordnung ist demnach jeder Geraden im Raume eine Gerade als Polare zugewiesen. Den vorigen Doppelsatz können wir jetzt auch in folgende Worte kleiden:

Geht eine Gerade durch einen Punkt, so liegt ihre Polare in der Polar-Ebene dieses Punktes.

Liegt eine Gerade in einer Ebene, so geht ihre Polare durch den Pol dieser Ebene.

Um zu einer Geraden g die Polare g_1 zu construiren, suchen wir hiernach entweder zu zwei Punkten von g die Polaren und bestimmen deren Schnittlinie g_1, oder wir suchen zu zwei Ebenen von g die Pole und bestimmen deren Verbindungslinie g_1. Wenn die Gerade g von der Fläche II. Ordnung in zwei Punkten geschnitten wird, so gehen also die beiden Ebenen, welche die Fläche in den Schnittpunkten berühren, durch die Polare g_1 von g; und wenn durch g zwei Berührungsebenen an die Fläche gelegt werden können, so enthält g_1 die beiden Berührungspunkte dieser Ebenen. Ist g eine Tangente der Fläche, so wird sie von ihrer Polare im Berührungspunkte geschnitten, und liegt mit derselben in einer Berührungsebene der Fläche; denn weil g in der Berührungsebene liegt, so muss g_1 den Pol derselben, d. h. den Berührungspunkt enthalten, und weil g durch den letztern geht,

so muss g_1 in der Polare desselben, d. h. in der Berührungsebene liegen. In jedem anderen Falle können wir die Polare g_1 einer Geraden g auch wie folgt bestimmen. Wir schneiden die Fläche II. Ordnung durch Ebenen, welche die Gerade g enthalten, und suchen den Pol von g in Bezug auf jede Schnittcurve; dann liegen alle diese Pole auf der Geraden g_1. Denn ist P ein beliebiger von diesen Polen, so geht die Polarebene von P durch die Gerade g und P muss daher auf g_1 liegen. Welche reciproke Construction ergiebt sich aus der soeben genannten?

Um zu einer gegebenen Ebene den Pol zu construiren, suchen wir die Polaren von beliebig vielen Punkten und Geraden der Ebene; alle diese Polaren schneiden sich in dem gesuchten Pole. Insbesondere gehen die Berührungsebenen aller Punkte, welche die Ebene mit der Fläche II. Ordnung gemein hat, durch den gesuchten Pol; und wenn durch irgend eine Gerade der Ebene zwei Berührungsebenen an die Fläche gelegt werden, so ist der Pol auch auf der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte enthalten, und zwar ist er (nach Seite 36) von der gegebenen Ebene harmonisch getrennt durch die beiden Berührungsebenen.

Die Polarität der Flächen II. Ordnung führt uns zu einem besonderen Falle der reciproken Verwandtschaft im Raume. Weil nämlich durch eine Fläche II. Ordnung jedem Punkte P eine Ebene π als Polare zugeordnet ist, und jeder durch P gehenden Ebene resp. Geraden ein in π liegender Punkt als Pol resp. Strahl als Polare, so findet hier die allgemeine Definition der Reciprocität (Seite 20) sofort Anwendung. Zwei räumliche Gebilde sind reciprok auf einander bezogen, und folglich projectivisch, wenn sie in Bezug auf eine Fläche II. Ordnung zu einander polar sind.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen lässt sich nun folgender Satz beweisen:

Jede Fläche II. Ordnung wird von einem Ebenenbündel II. Ordnung eingehüllt.

Wir denken uns die Fläche II. Ordnung durch zwei reciproke Strahlenbündel S und S_1 erzeugt, so dass in jedem Punkte P der Fläche ein Strahl von S und die ihm entsprechende Ebene von S_1 sich schneiden. Dann werden die sämmtlichen Berührungsebenen der Fläche durch zwei reciproke ebene Systeme σ und σ_1 erzeugt, indem die Berührungsebene des beliebigen Punktes P einen Strahl

von σ mit dem ihm entsprechenden Punkte von σ_1 verbindet. Und zwar sind die ebenen Systeme zu den Strahlenbündeln S und S_1 polar in Bezug auf die Fläche II. Ordnung; die Fläche wird in S und S_1 von den resp. Ebenen σ und σ_1 berührt, und jeder Geraden oder Ebene von S oder S_1 entspricht resp. ein Strahl oder Punkt in σ oder σ_1.

Für spätere Untersuchungen führen wir noch folgende Benennungen ein:

Zwei Punkte, oder ein Punkt und ein Strahl heissen **conjugirt**, wenn jeder in der Polare des andern liegt.

Zwei Ebenen, oder eine Ebene und eine Gerade heissen **conjugirt**, wenn jede durch den Pol resp. die Polare der anderen geht.

„Zwei Gerade heissen **conjugirt**, wenn jede mit der Polare „der anderen in einer Ebene liegt."

Ein Punkt ist hiernach allen Punkten und Strahlen conjugirt, welche in seiner Polarebene liegen; eine Ebene allen Strahlen und Ebenen, welche durch ihren Pol gehen; und endlich eine Gerade g allen Punkten, welche auf ihrer Polare g_1 liegen, allen Ebenen, welche durch g_1 hindurchgehen, und allen Geraden, von welchen g_1 geschnitten wird. Jeder Punkt, jede Tangente und jede Berührungsebene der Fläche ist sich selbst conjugirt.

Sind zwei Punkte A und B conjugirt bezüglich einer Fläche II. Ordnung, so sind sie auch conjugirt bezüglich jeder Curve II. Ordnung, in welcher die Fläche von einer Ebene des Büschels $\overline{AB}$ geschnitten wird.

Sind zwei Ebenen α und β conjugirt bezüglich einer Fläche II. Ordnung, so sind sie auch conjugirt bezüglich jeder Kegelfläche II. Ordnung, welche die Fläche umhüllt und deren Mittelpunkt in der Geraden $\overline{\alpha\beta}$ liegt.

Denn die Polarebene des Punktes A geht nach der Annahme durch B; sie enthält aber auch (Seite 36) die Polare von A in Bezug auf jene Schnittcurve II. Ordnung, und folglich muss diese Polare den Punkt B enthalten, wie behauptet wurde. — Der Doppelsatz ist umkehrbar.

Ist also g eine Gerade, welche nicht sich selbst conjugirt ist (d. h. die Fläche II. Ordnung nicht berührt), und werden einander zugeordnet:

je zwei conjugirte Punkte der Punktreihe g, so sind diese Punkte involutorisch gepaart. (I. Abth. Seite 119.)

je zwei conjugirte Ebenen des Büschels g, so sind diese Ebenen involutorisch gepaart.

„Wenn in einem Strahlenbüschel, von welchem weder der „Mittelpunkt noch die Ebene sich selbst conjugirt ist, je zwei „conjugirte Strahlen einander zugeordnet werden, so sind seine „Strahlen involutorisch gepaart.“

Dieser letzte Satz lässt sich auf den vorhergehenden zurückführen: Nämlich in der Ebene des Strahlenbüschels können wir zu jedem Strahle einen ihm conjugirten Punkt bestimmen; wir erhalten so eine Punktreihe, deren Punkte involutorisch gepaart sind, und zu welcher der Strahlenbüschel perspectivische Lage hat.

Wenn ein Punkt oder Strahl ein ebenes System α beschreibt, so beschreibt seine Polare einen zu α reciproken Strahlenbündel A, dessen Centrum der Pol der Ebene α ist. Jeder ebene Schnitt β dieses Bündels ist ebenfalls reciprok auf α bezogen, und jeder zu α perspectivische Strahlenbündel B ist reciprok zu A. Daraus folgt:

Zwei ebene Systeme α und β, deren Träger nicht conjugirt sind, werden reciprok auf einander bezogen, wenn man jedem Punkte des einen die ihm conjugirte Gerade des andern als entsprechende zuweist.

Zwei Strahlenbündel A und B, deren Mittelpunkte nicht conjugirt sind, werden reciprok auf einander bezogen, wenn man jedem Strahle des einen die ihm conjugirte Ebene des andern als entsprechende zuweist.

Wenn ein Punkt ein gerades Gebilde g beschreibt, so beschreibt seine Polare einen zu g projectivischen Ebenenbüschel g_1, und jeder Schnitt von g_1 ist folglich zu g, jeder Schein von g ist zu g_1 projectivisch. Daraus ergiebt sich u. A.:

„Zwei Punktreihen oder Büschel I. Ordnung, deren Träger „nicht conjugirt sind, werden projectivisch aufeinander bezogen, „wenn man je zwei conjugirte Elemente derselben einander „als entsprechende zuweist.“

Anhang: Durchmesser und Durchmesserebenen; Mittelpunkt, Hauptaxen und Symmetrieebenen der Flächen II. Ordnung.

„Die Halbirungspunkte paralleler Sehnen, welche nach „einer beliebig gegebenen Richtung in einer Fläche II. Ord- „nung gezogen werden können, liegen in einer Durchmesser- „ebene der Fläche II. Ordnung. Diese Ebene enthält auch „die Berührungspunkte aller Tangenten und Berührungsebenen, „welche nach der gegebenen Richtung an die Fläche gelegt werden

„können, sowie die Mittelpunkte aller Curven II. Ordnung, „welche auf der Fläche liegen und deren Ebenen jene Richtung „enthalten."

Diese „Durchmesserebene" ist die Polare desjenigen unendlich fernen Punktes, welcher in der gegebenen Richtung liegt.

„Wird eine Fläche II. Ordnung durch einen Büschel paralleler „Ebenen geschnitten, so liegen die Mittelpunkte der Schnitt-„curven auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der Fläche „genannt wird. Die Berührungsebenen der Punkte, in welchen „die Fläche etwa vom Durchmesser geschnitten wird, sind „ebenfalls jenen Schnittebenen parallel."

Dieser „Durchmesser" ist die Polare der unendlich fernen Geraden, welche die parallelen Ebenen mit einander gemein haben.

„Alle Durchmesser und Durchmesserebenen einer Fläche „II. Ordnung gehen durch einen Punkt";

nämlich durch den Pol der unendlich fernen Ebene, weil in dieser die Polaren und Pole aller Durchmesser und Durchmesserebenen enthalten sind.

Wenn die Fläche II. Ordnung von der unendlich fernen Ebene berührt wird, so ist der Berührungspunkt der Pol dieser Ebene; derselbe liegt also unendlich fern. Dieser Fall tritt ein bei den beiden Paraboloiden; also:

„Die Durchmesser und Durchmesserebenen eines hyper-„bolischen oder elliptischen Paraboloides gehen durch den „unendlich fernen Punkt, in welchem die Fläche von der unend-„lich fernen Ebene berührt wird. Die Durchmesser eines „Paraboloides sind sonach parallel."

Bei den übrigen Flächen II. Ordnung ist der Pol der unendlich fernen Ebene ein eigentlicher Punkt, welcher der „Mittelpunkt" der Fläche genannt wird.

„Der Mittelpunkt eines Ellipsoides, eines einfachen oder „eines zweifachen Hyperboloides ist zugleich der Mittelpunkt „jeder Curve II. Ordnung, welche auf der Fläche liegt und deren „Ebene durch ihn hindurchgeht. Jede durch den Mittelpunkt „gehende Sehne der Fläche wird in diesem Punkte halbirt."

Denn der Mittelpunkt ist jedem unendlich fernen Punkte oder Strahle conjugirt und von dem unendlich fernen Punkte der Sehne durch zwei Curvenpunkte harmonisch getrennt (Seite 36).

„Alle Ebenen, welche ein ein- oder zweischaliges Hyper-„boloid in seinen unendlich fernen Punkten berühren, schneiden

„sich im Mittelpunkte (Seite 39), und umhüllen eine Kegel-„fläche II. Ordnung, welche der Asymptotenkegel des Hyper-„boloides genannt wird. Der Asymptotenkegel berührt das „Hyperboloid in seiner unendlich fernen Curve. Eine be-„liebige Schnittebene hat mit dem Hyperboloid eine Ellipse, „Parabel oder Hyperbel gemein, je nachdem der Asymptoten-„kegel von der gegebenen oder einer parallelen Ebene in einer „Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten wird.“

Jedem Durchmesser eines Ellipsoides oder Hyperboloides ist eine Durchmesserebene sowie jeder in dieser Ebene liegende Durchmesser conjugirt. Diese conjugirte Ebene halbirt alle Sehnen der Fläche, welche dem Durchmesser parallel sind; und umgekehrt geht der Durchmesser durch die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Fläche, welche der conjugirten Durchmesserebene parallel sind. Wenn die Verbindungsebene von zwei conjugirten Durchmessern die Fläche II. Ordnung schneidet, so sind die Durchmesser auch in Bezug auf die Schnittcurve conjugirt, weil alle Sehnen dieser Curve, welche zu dem einen Durchmesser parallel sind, von dem andern halbirt werden.

Ein Durchmesser, welcher zu den ihm conjugirten Ebenen normal ist, soll eine „Hauptaxe“ der Fläche II. Ordnung heissen.

„Ein Paraboloid hat nur eine Hauptaxe a.“

In derselben liegen die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen zu der gemeinschaftlichen Richtung der Durchmesser rechtwinklig sind. Die Durchmesserebenen, welche durch die Axe a gelegt werden können, sind paarweise conjugirt, der Ebenenbüschel a ist also ein involutorischer (Seite 40). Schneiden wir denselben durch eine zu a senkrechte Ebene in einem involutorischen Strahlenbüschel, so folgt, je nachdem dieser ein rechtwinkliger ist oder nicht, dass entweder je zwei oder doch irgend zwei einander conjugirte Ebenen α und α_1 des Büschels a auf einander senkrecht stehen (I. Abth. Seite 146). Weil nun die Ebene α auch zu allen Ebenen, welche auf der Hauptaxe a senkrecht stehen, conjugirt und normal ist, so ist sie auch normal zu der Richtung, nach welcher ihr unendlich ferner Pol liegt; sie halbirt folglich alle zu ihr rechtwinkligen Sehnen des Paraboloides, und kann deshalb eine „Symmetrieebene“ der Fläche genannt werden. Das Gleiche gilt von der Ebene α_1.

„Das Paraboloid hat also mindestens zwei Symmetrieebenen, „welche sich in der Hauptaxe rechtwinklig schneiden.“

Wenn jede durch die Hauptaxe a gelegte Ebene eine Symmetrieebene ist, so hat jede Schnittcurve des Paraboloides, deren Ebene zu a senkrecht steht, einen rechtwinkligen Durchmesserbüschel, wie vorhin bemerkt wurde, und ist folglich ein Kreis (I. Abth. Seite 90). Das Paraboloid ist in diesem Falle ein Rotations-Paraboloid.

Die Durchmesser eines Ellipsoides oder Hyperboloides stehen im Allgemeinen nicht senkrecht zu den ihnen conjugirten Durchmesserebenen. Denn wenn dieses allgemein stattfindet, wenn also jeder Durchmesser eine Hauptaxe der Fläche ist, so ist die Fläche eine Kugelfläche. In diesem Falle nämlich ist jeder Durchmesserbüschel ein rechtwinkliger, und folglich die Curve, in welcher seine Ebene die Fläche schneidet, ein Kreis; weshalb auch alle Punkte dieser Fläche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben. — Im Allgemeinen steht auf einem beliebigen Durchmesser d eines Ellipsoides oder Hyperboloides nur ein einziger conjugirter Durchmesser d_1 senkrecht, welcher sowohl in der zu d conjugirten Durchmesserebene δ, als auch in der zu d senkrechten Durchmesserebene δ_1 liegt.

Beschreibt der Durchmesser d um den Mittelpunkt der Fläche einen Strahlenbüschel γ, so beschreibt die ihm conjugirte Durchmesserebene δ einen Ebenenbüschel, welcher zum Strahlenbüschel γ projectivisch (Seite 39) und dessen Axe g der Ebene γ conjugirt ist. Zugleich beschreibt die zu d normale Durchmesserebene δ_1 einen zweiten Ebenenbüschel, dessen Axe g_1 zur Ebene γ normal ist; und auch dieser Ebenenbüschel g_1 ist zum Strahlenbüschel γ projectivisch, weil je zwei Strahlen des letzteren denselben Winkel mit einander bilden, wie die zu ihnen normalen Ebenen des ersteren. Die Ebenenbüschel g und g_1 sind folglich auch zu einander projectivisch, und erzeugen im Allgemeinen eine Kegelfläche II. Ordnung; oder:

> „Beschreibt ein Durchmesser d des Ellipsoides oder des „Hyperboloides um den Mittelpunkt einen Strahlenbüschel γ, „so beschreibt zugleich der Durchmesser d_1, welcher zu d „conjugirt und normal ist, eine Kegelfläche II. Ordnung um „den Mittelpunkt.“

Eine Ausnahme von diesem Satze findet nur dann Statt, wenn der Strahlenbüschel γ eine Hauptaxe der Fläche enthält, weil dann die Ebenenbüschel g und g_1 die der Hauptaxe conjugirte Durchmesserebene entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich der Beweis führen, dass jedes Ellipsoid oder Hyperboloid Hauptaxen besitzt, was in dem genannten Ausnahmefall ohnehin feststeht. Seien zu zwei Durchmesserbüscheln γ und ε die zugehörigen Kegelflächen II. Ordnung Γ und E construirt, und sei ε, was leicht ausführbar ist, so gewählt, dass durch E ein innerhalb und ein ausserhalb der Kegelfläche Γ gelegener Durchmesser mit einander verbunden werden. Dann müssen die concentrischen Kegelflächen Γ und E sich schneiden; sie haben also mindestens zwei und höchstens vier Strahlen mit einander gemein. Einer von diesen gemeinschaftlichen Strahlen ist conjugirt und normal zu dem gemeinschaftlichen Strahle der Durchmesserbüschel γ und δ; jeder andere a aber hat sowohl in γ als auch in δ einen conjugirten Durchmesser, zu welchem er normal ist. Folglich ist a auch zu der Ebene normal, in welcher die ihm conjugirten Durchmesser liegen, ist also eine Hauptaxe des Ellipsoides oder Hyperboloides. Die zur Hauptaxe a conjugirte Durchmesserebene ist eine Symmetrieebene der Fläche, weil sie alle zu ihr senkrechten Sehnen halbirt.

Der involutorische Durchmesserbüschel, welcher in der Symmetrieebene liegt, ist entweder ein rechtwinkliger, oder er enthält zwei conjugirte Durchmesser b und c, die aufeinander senkrecht stehen. Im ersteren Falle folgt ebenso, wie vorhin bei dem Paraboloid, dass die Fläche II. Ordnung eine Rotationsfläche und jeder dieser Durchmesser eine Hauptaxe derselben ist; im letzteren Falle hat die Fläche nur drei Hauptaxen a, b, c, welche auf einander senkrecht stehen, und paarweise conjugirt sind.

Wir sind in der jetzt beendigten Untersuchung über die Hauptaxen eines Ellipsoides oder Hyperboloides von dem Umstande ausgegangen, dass jedem Durchmesser eine Durchmesserebene conjugirt ist, und dass jedem Durchmesserbüschel ein ihm projectivischer Büschel von conjugirten Durchmesserebenen entspricht. Ebenso ist bei der eigentlichen Kegelfläche II. Ordnung jedem durch den Mittelpunkt gehenden Strahl eine Durchmesserebene zugeordnet, und jedem Büschel von solchen Strahlen ein projectivischer Büschel solcher Ebenen. Unsere Betrachtungen finden deshalb auch auf die Kegelflächen II. Ordnung Anwendung, und wir können den Satz aufstellen:

„Jedes Ellipsoid, jedes Hyperboloid und jede eigentliche „Kegelfläche II. Ordnung hat drei zu einander rechtwinklige „Hauptaxen, und deren drei Verbindungsebenen sind Sym-

„metrieebenen der Fläche. Nur wenn die Fläche eine Ro„tationsfläche ist, hat sie mehr als drei, nämlich unendlich „viele Hauptaxen.“

Siebenter Vortrag.

Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz ebener Systeme und der Curven zweiter Ordnung.

Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 werden „affin“ genannt, wenn ihre unendlich fernen Geraden einander entsprechen. Jedem unendlich fernen Punkte des einen Systems entspricht alsdann ein unendlich ferner Punkt des anderen, jedem Parallelogramm entspricht ein Parallelogramm, jeder Punktreihe eine zu ihr projectivisch ähnliche Punktreihe (I. Abth. Seite 74). Ein Parallelstrahlenbündel wird von zwei beliebigen Ebenen in affinen Systemen geschnitten.

„Sollen zwei ebene Systeme affin auf einander bezogen „werden, so können wir in jedem derselben ein eigentliches „Dreieck beliebig annehmen und die Eckpunkte dieser Drei„ecke einander willkürlich zuweisen. Die Dreiecke bilden mit „den unendlich fernen Geraden der Systeme zwei auf einander „bezogene vollständige Vierseite, durch sie ist also (Seite 7) „zu jedem Punkte oder Strahle des einen Systems der zuge„hörige Punkt resp. Strahl des andern eindeutig bestimmt.“

Wir wissen, dass in projectivisch ähnlichen Punktreihen je zwei homologe Strecken in constantem Verhältniss zu einander stehen, dass also die Punktreihen durch ihre homologen Punkte proportional getheilt sind (I. Abth. Seite 75). Sind nun in den affinen Systemen Σ und Σ_1 je zwei homologe Gerade x, y und x_1, y_1 (Fig. 7) gegeben, die sich in den resp. Punkten M und M_1 schneiden, und sind ferner die Verhältnisse $\frac{DC}{D_1C_1}$ und $\frac{HE}{H_1E_1}$ gegeben, in denen ihre homologen Abschnitte zu einander stehen, so kann auf folgende Weise zu jedem beliebig gegebenen Punkte K von Σ der entsprechende Punkt K_1 von Σ_1 construirt werden. Wir ziehen

durch K eine Parallele zu x, welche die Gerade y im Punkte J schneidet, und eine Parallele zu y, welche von x im Punkte L geschnitten wird. Sodann bestimmen wir zu J den entsprechenden Punkt J_1 auf y_1 so, dass folgende Proportion befriedigt wird:

$$\frac{MJ}{M_1 J_1} = \frac{HE}{H_1 E_1},$$

und ebenso bestimmen wir zu L den entsprechenden Punkt L_1 auf x_1 so, dass:

$$\frac{ML}{M_1 L_1} = \frac{DC}{D_1 C_1}.$$

Ziehen wir endlich durch J_1 eine Parallele zu x_1 und durch L_1 eine Parallele zu y_1, so scheiden sich diese beiden Geraden im Punkte K_1, welcher zu K der entsprechende ist.

Wir können diese schon von Euler angegebene Construction in der Sprache der analytischen Geometrie wie folgt ausdrücken:

„Um zu einem gegebenen ebenen Gebilde ein affines zu „construiren, beziehen wir dasselbe auf irgend zwei feste Coor- „dinaten-Axen. Sodann vergrössern oder verkleinern wir die „Ordinaten sämmtlicher Punkte nach einem beliebigen con- „stanten Verhältniss und ebenso die Abscissen nach einem be- „liebig gewählten Verhältniss. Mittelst dieser neuen Coordi- „naten endlich construiren wir die sämmtlichen Punkte des „gesuchten affinen Gebildes in Bezug auf irgend zwei willkürlich „angenommene, feste Coordinaten-Axen.“

Bezeichnen wir mit dem Namen „Figur“ ein allseitig begrenztes Stück eines ebenen Systems, so können wir für affine ebene Systeme einen Satz aufstellen, welcher dem vorhin erwähnten Satze über projectivisch ähnliche Punktreihen analog ist, nämlich:

In affinen ebenen Systemen stehen je zwei einander entsprechende Figuren in constantem Verhältniss zu einander; oder zwei beliebige Figuren des einen Systems verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Figuren des andern Systems.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für Parallelogramme und Dreiecke. Seien also (Fig. 7) $ABCD$ und $EFGH$ zwei beliebige Parallelogramme des einen Systems Σ, $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $E_1 F_1 G_1 H_1$ die resp. entsprechenden Parallelogramme des zweiten Systems Σ_1. Die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ werden von $\overline{EH}$ in resp. J und M geschnitten, und von $\overline{FG}$ in resp. K und L; so dass $JKLM$ ein neues Parallelogramm von Σ ist, welchem in Σ_1 ein analog gelegenes Parallelogramm $J_1 K_1 L_1 M_1$ entspricht. Die Parallelo-

gramme $ABCD$ und $JKLM$ verhalten sich wie ihre Grundlinien DC und ML, weil ihre Höhen gleich sind, und ebenso verhält sich:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 : J_1 K_1 L_1 M_1 = D_1 C_1 : M_1 L_1.$$

Weil aber die geraden Gebilde $MLDC$ und $M_1 L_1 D_1 C_1$ projectivisch ähnlich sind, so muss sich auch verhalten:

$$DC : ML = D_1 C_1 : M_1 L_1,$$

und wir erhalten folglich die Proportion:

$$ABCD : JKLM = A_1 B_1 C_1 D_1 : J_1 K_1 L_1 M_1.$$

Ganz ebenso ergiebt sich, da

$$\frac{JKLM}{EFGH} = \frac{KL}{FG} = \frac{K_1 L_1}{F_1 G_1} = \frac{J_1 K_1 L_1 M_1}{E_1 F_1 G_1 H_1},$$

die Proportion:

$$JKLM : EFGH = J_1 K_1 L_1 M_1 : E_1 F_1 G_1 H_1;$$

und diese Proportion, mit der vorhergehenden verbunden, führt uns sofort zu der gesuchten:

$$ABCD : EFGH = A_1 B_1 C_1 D_1 : E_1 F_1 G_1 H_1.$$

Setzen wir statt jedes Parallelogramms seine Hälfte, nämlich dass eine der beiden Dreiecke, in welche es durch eine Diagonale zerfällt, so entsteht die Proportion:

$$ABC : EFG = A_1 B_1 C_1 : E_1 F_1 G_1.$$

Da die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ ganz beliebig in Σ gewählt wurden, so dürfen wir auch die Dreiecke ABC und EFG als ganz beliebige betrachten. Wir haben also bewiesen, das zwei beliebige Dreiecke des einen Systems sich zu einander verhalten, wie die ihnen entsprechenden Dreiecke des anderen Systems.

Auch für beliebige geradlinig begrenzte Figuren gilt aber unser Satz, weil dieselben durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden können; und auch für krummlinig begrenzte muss er Geltung haben, weil er für alle geradlinigen Figuren gilt, welche den krummlinigen eingeschrieben oder umschrieben sind, und weil deren Flächeninhalte den Inhalten der krummlinig begrenzten Figuren unbegrenzt nahe gebracht werden können.

Ein besonderer Fall der Affinität ist die „Gleichheit". Bei affinen Systemen tritt dieser Fall ein, wenn je zwei homologe Figuren derselben inhaltsgleich sind. Der Begriff der Gleichheit ist hier enger gefasst, als in der Planimetrie; denn z. B. zwei Vierecke $KLMN$ und $K_1 L_1 M_1 N_1$, welche denselben Inhalt haben, sind nur dann homologe Figuren affiner Systeme, wenn auch die Dreiecke KLM, KLN, KMN und LMN, welche in dem Vier-

ecke $KLMN$ enthalten sind, den resp. Dreiecken $K_1 L_1 M_1$, $K_1 L_1 N_1$, $K_1 M_1 N_1$ und $L_1 M_1 N_1$ inhaltsgleich sind. Wir haben es hier mit einer Gleichheit auch der kleinsten einander entsprechenden Theile zu thun.

Zwei Curven, welche in affinen Systemen einander entsprechen, haben die gleiche Anzahl von unendlich fernen Punkten und Asymptoten, weil jedem unendlich fernen Punkte der einen Curve ein unendlich ferner Punkt der andern entsprechen muss, und jeder Tangente eine Tangente. Einer Ellipse können also nur Ellipsen affin sein, einer Parabel nur Parabeln, einer Hyperbel ausschliesslich Hyperbeln. Es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass zwei gleichartige Curven II. Ordnung stets affin auf einander bezogen werden können, und zwar auf unendlich viele Arten. Diese Beziehungen werden uns zu manchen interessanten Sätzen führen.

„Um zwei Parabeln affin auf einander zu beziehen, können „wir irgend zwei Punkten A, B der einen zwei beliebige Punkte „A_1, B_1 der andern willkürlich zuweisen. Dadurch ist aber „jedem Punkte der einen Parabel oder ihrer Ebene ein Punkt „der anderen resp. von deren Ebene zugewiesen.“

Seien nämlich (Fig. 8) $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ die Tangenten der ersten Parabel k in den Punkten A und B, und ebenso $\overline{C_1 A_1}$ und $\overline{C_1 B_1}$ diejenigen der zweiten Parabel k_1 in A_1 und B_1. Dann können und müssen wir die ebenen Systeme, welchen k und k_1 angehören, in der Weise affin auf einander beziehen, dass den Eckpunkten des Dreiecks ABC die resp. Eckpunkte des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ entsprechen. Der Parabel k, welche in A und B die resp. Geraden $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ berührt und die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene zur Tangente hat, entspricht dann eine Curve II. Ordnung, welche gleich k_1 von den Geraden $\overline{C_1 A_1}$ und $\overline{C_1 B_1}$ in resp. A_1 und B_1 berührt wird und die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, und welche folglich (I. Abth. Seite 63) mit k_1 zusammenfällt.

Das von der Sehne AB begrenzte Segment der Parabel k steht zu dem Dreieck ABC in demselben Verhältniss, wie das von $A_1 B_1$ begrenzte entsprechende Segment von k_1 zu dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$. Da nun die Punkte A und B auf k ganz willkürlich angenommen sind, also auch durch irgend zwei andere ersetzt werden können, so folgt, dass jedes beliebige Parabelsegment in constantem Verhältniss steht zu demjenigen Dreieck, welches von der Sehne des Segmentes und den Tangenten der beiden Endpunkte begrenzt wird.

Sei nun (Fig. 9) G die Mitte der Sehne AB, so dass die Gerade CG von der Parabel halbirt wird in D (I. Abth. Seite 93); sei ferner EF die Tangente der Parabel im Punkte D, welche zur Sehne AB parallel läuft und in E und F die resp. Tangenten-Abschnitte AC und BC halbirt. Dann ist, wenn (AB), (DB) und (AD) die Parabelsegmente über den resp. Sehnen AB, DB und AD bezeichnen:

$$\frac{(AB)}{ABC} = \frac{(DB)}{DBF} = \frac{(AD)}{ADE} = m,$$

indem m eine constante Zahl bedeutet. Anderseits ist nach der Figur:

$$(AB) = ABD + (DB) + (AD).$$

Setzen wir in die letzte Gleichung für (AB), (DB) und (AD) ihre Werthe aus der vorhergehenden ein, so folgt für m:

$$m(ABC - DBF - ADE) = ABD.$$

Wegen $CD = DG$, $CF = FB$ und $CE = EA$ ist aber:

$$ABD = \tfrac{1}{2}ABC \text{ und } DBF + ADE = FCE = \tfrac{1}{4}ABC;$$

Die Gleichung für m geht hiedurch über in:

$$m(ABC - \tfrac{1}{4}ABC) = \tfrac{1}{2}ABC \text{ oder } m = \tfrac{2}{3}.$$

Somit ist auch $(AB) = \frac{2}{3}ABC$ und wir haben den Satz:

„Ein Parabelsegment ist gleich zwei Dritteln des Dreiecks, „welches von der Sehne des Segmentes und den Tangenten der „beiden Endpunkte begrenzt wird.“

Auch die Gleichung $(AB) = \frac{4}{3}ABD$ lässt sich ähnlich in Worten ausdrücken.

Sei (Fig. 10) KLM ein beliebiges Dreieck, welches einer Parabel eingeschrieben ist, und seien K_1, L_1, M_1 die Pole der resp. Seiten LM, MK und KL dieses Dreiecks. Dann ergiebt sich, wenn MK die grösste Seite des Dreiecks bezeichnet:

$$KLM = (MK) - (KL) - (LM),$$

oder:

$$KLM = \tfrac{2}{3}(KL_1M - KM_1L - LK_1M) = \tfrac{2}{3}(M_1L_1K_1 + KLM),$$

und folglich:

$$KLM = 2\,M_1L_1K_1;$$

das heisst:

„Ein der Parabel eingeschriebenes Dreieck ist zweimal so „gross, wie dasjenige umschriebene Dreieck, von dessen Seiten „die Parabel in den Eckpunkten des eingeschriebenen berührt „wird.“

Zwei Parabeln können auch als gleiche Curven betrachtet werden, denn wir können sie auf unzählig viele Weisen so auf einander affin beziehen, dass je zwei homologe Segmente, wie (AB) und $(A_1 B_1)$ (Fig. 8), inhaltsgleich sind.

In zwei affinen Ellipsen oder Hyperbeln entsprechen einander die Durchmesser, und zwar muss jedem Paare conjugirter Durchmesser der einen Curve ein Paar conjugirter Durchmesser der anderen entsprechen. Dieses ergiebt sich daraus, dass jeder Schaar paralleler Sehnen der einen Curve wieder eine Schaar paralleler Sehnen der anderen entspricht, und wegen der Proportionalität homologer Abschnitte auch dem Mittelpunkt einer Sehne nothwendig der Mittelpunkt der entsprechenden Sehne. Bei affinen Hyperbeln entsprechen ausserdem die Asymptoten einander.

„Um zwei Hyperbeln affin auf einander zu beziehen, können „wir jeder Asymptote der einen eine Asymptote der anderen „zuweisen und ausserdem noch irgend einem Punkte oder auch „einer Tangente der ersteren einen beliebigen Punkt resp. eine „Tangente der anderen Hyperbel."

Die Hyperbeln lassen sich nämlich projectivisch so auf einander beziehen (I. Abth. Seite 105), dass den beiden unendlich fernen Punkten und einem beliebigen dritten Punkte der einen die resp. unendlich fernen Punkte und irgend ein dritter Punkt der anderen entsprechen. Dadurch sind aber die beiden ebenen Systeme, in welchen die Hyperbeln liegen, collinear auf einander bezogen (Seite 10), und sogar affin, weil die Verbindungslinien der unendlich fernen Hyperbelpunkte, d. h. die unendlich fernen Geraden der Systeme, einander entsprechen.

„Um zwei Ellipsen k und k_1 affin auf einander zu beziehen, „können wir die Endpunkte A, B und A_1, B_1 von irgend zwei „Paar conjugirten Halbmessern derselben einander als ent-„sprechende zuweisen."

Seien $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 11) die beiden Parallelogramme, welche den resp. Ellipsen k und k_1 eingeschrieben sind und welche die beiden Paare conjugirter Durchmesser $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{A_1 C_1}$, $\overline{B_1 D_1}$ zu Diagonalen haben; seien ferner M und M_1 die Mittelpunkte von resp. k und k_1. Dann können wir die ebenen Systeme, denen k und k_1 angehören, affin so auf einander beziehen, dass den Punkten A, B, C des einen die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 des andern entsprechen. Nun entspricht aber dem Halbirungspunkte M von AC nothwendig der Halbirungs-

punkt M_1 von $A_1 C_1$, und der Ellipse k, welche in A und C von zwei Parallelen zum Durchmesser $\overline{MB}$ berührt wird und durch B geht, muss die Ellipse k_1 entsprechen als diejenige Curve II. Ordnung, welche in A_1 und C_1 von zwei Parallelen zur Geraden $\overline{M_1 B_1}$ berührt wird und durch B_1 geht.

Die conjugirten Halbmesser $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ der einen Ellipse k können mit zwei beliebigen anderen vertauscht, die Ellipsen k und k_1 also auf unzählig viele Weisen affin auf einander bezogen werden. Bei jeder Lage von $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ muss sich das Parallelogramm $ABCD$ zu der Fläche der Ellipse k verhalten, wie das unveränderte Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu der Fläche der Ellipse k_1. Also:

„Alle einer Ellipse eingeschriebenen Parallelogramme, deren „Diagonalen von zwei conjugirten Durchmessern gebildet werden, „sind inhaltsgleich."

Das umschriebene Parallelogramm (Fig. 11), dessen Seiten die Ellipse in den Punkten A, B, C, D berühren, ist doppelt so gross wie $ABCD$; also:

„Alle einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme, deren „Seiten zu zwei conjugirten Durchmessern parallel laufen, „sind inhaltsgleich."

Sind $2a$ und $2b$ die Längen der beiden Axen einer Ellipse, so ist $4ab$ der Inhalt jedes solchen umschriebenen Parallelogramms; denn $4ab$ ist der Inhalt des Rechteckes, welches von den Scheiteltangenten der Ellipse begrenzt wird. Sei nun die Ellipse affin bezogen auf einen Kreis vom Radius r; dann verhält sich die Fläche J der Ellipse zu $4ab$ wie die Fläche $r^2\pi$ des Kreises zu dem Inhalt $4r^2$ eines dem Kreise umschriebenen Quadrates (Seite 47). Also:

$$J : 4ab = r^2\pi : 4r^2 \quad \text{oder} \quad J = ab\pi.$$

„Die Fläche der Ellipse ist gleich dem Product aus ihren „beiden Halbaxen in die Zahl π."

Weil der Kreis durch zwei conjugirte Durchmesser in vier gleiche Theile zerlegt wird, so gilt dasselbe von der Ellipse.

Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 heissen ähnlich, wenn je zwei homologe Winkel derselben einander gleich sind. Weil zwei Parallelen von Σ allemal zwei Parallele von Σ_1 entsprechen, und also jedem unendlich fernen Punkte von Σ ein unendlich ferner Punkt in Σ_1, so sind die ähnlichen Systeme auch affin. Die Seiten homologer Dreiecke von Σ und Σ_1 sind einander proportional, weil die Dreiecke gleiche Winkel haben; und folg-

lich stehen überhaupt je zwei homologe Strecken der Systeme in constantem Verhältniss zu einander. Zwei ähnliche Systeme liegen perspectivisch, sobald irgend zwei Gerade des einen, welche sich unter schiefen Winkeln schneiden, zu den ihnen entsprechenden Geraden des anderen Systems parallel laufen; denn dann sind je zwei homologe Gerade parallel, und die ebenen Systeme haben ihre unendlich ferne Punktreihe entsprechend gemein (vergl. Seite 16 und 17). Von zwei perspectivischen ähnlichen Systemen pflegt man zu sagen, „sie liegen ähnlich"; sie sind entweder parallele Schnitte eines Strahlenbündels, oder sie liegen in einander und haben noch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein; in beiden Fällen heisst der Punkt, durch welchen alle Verbindungslinien homologer Punkte der Systeme gehen, ihr „Aehnlichkeitspunkt".

Werden zwei ähnliche Curven II. Ordnung in perspectivische Lage gebracht, so dass irgend zwei sich schneidende Sehnen oder Tangenten der einen zu den homologen Sehnen oder Tangenten der anderen parallel laufen, so ist jede Sehne oder Tangente der einen Curve parallel zu der homologen Sehne oder Tangente der anderen. Und die Curven liegen entweder in einer Ebene, so dass die sämmtlichen Verbindungslinien homologer Punkte sich in einem und demselben Punkte schneiden, oder sie sind parallele Schnitte einer Kegelfläche. Zwei Parabeln können allemal als ähnliche Curven II. Ordnung betrachtet werden; bringt man ihre Ebenen und ihre Axen in parallele Lage, so laufen auch je zwei homologe Tangenten der Parabeln parallel. Zwei Ellipsen oder Hyperbeln können nur dann als ähnliche Curven betrachtet werden, wenn sie so in eine Ebene gelegt werden können, dass nicht blos ihre Hauptaxen, sondern ausserdem irgend zwei Paar conjugirte Durchmesser sich decken; denn je zwei conjugirte Durchmesser der einen Curve müssen sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die ihnen entsprechenden conjugirten Durchmesser der anderen. Bei jener Lage der beiden Curven ist ihr Mittelpunkt zugleich ihr Aehnlichkeitspunkt. Parallele Schnittcurven einer Fläche zweiter Ordnung sind, wie hieraus leicht sich ergiebt, ähnlich; nur dann tritt eine Ausnahme ein, wenn sie Hyperbeln sind, die in ungleichen Asymptotenwinkeln liegen.

Wie die Affinität ein besonderer Fall ist von der Collineation und die Aehnlichkeit wieder von der Affinität, so ist die „Congruenz" ein besonderer Fall der Aehnlichkeit. Nämlich zwei ähnliche ebene Systeme heissen congruent, wenn ihre homologen

Strecken gleich sind. So führt uns die Verwandtschaft der Collineation auch zu denjenigen räumlichen Beziehungen, mit denen die Planimetrie der Alten sich vorzugsweise beschäftigt.

Achter Vortrag.

Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz und Symmetrie räumlicher Systeme und der Flächen zweiter Ordnung.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 werden „affin“ genannt, wenn ihre unendlich fernen Ebenen einander entsprechen. Da hiernach jeder unendlich fernen Geraden von Σ eine solche in Σ_1 entspricht, so sind auch je zwei homologe ebene Systeme von Σ und Σ_1 affin; und ebenso sind je zwei homologe Punktreihen von Σ und Σ_1 projectivisch ähnlich. Jedem Parallelogramm von Σ muss in Σ_1 ein Parallelogramm entsprechen, und jedem Parallelepipedon ein Parallelepipedon.

„Um zwei räumliche Systeme affin auf einander zu beziehen,
„dürfen wir in jedem derselben ein eigentliches Tetraeder be-
„liebig annehmen und die Eckpunkte dieser Tetraeder ein-
„ander willkürlich zuweisen.“

Weil nämlich hiedurch die vier Seitenflächen des einen Tetraeders denjenigen des andern zugewiesen sind, ausserdem aber die unendlich fernen Ebenen der Systeme einander entsprechen sollen, so ist zu jedem Elemente des einen Systems das entsprechende des andern eindeutig bestimmt (Seite 22). Die Construction affiner Gebilde lässt sich mit Hülfe von Parallelcoordinaten ganz ähnlich für den Raum ausführen wie oben (Seite 47) für die Ebene; ich übergehe den leichten Beweis dieser Behauptung.

Bezeichnen wir ein allseitig begrenztes Stück eines räumlichen Systems mit dem Namen „Körper“, so können wir folgenden Satz aufstellen:

In affinen räumlichen Systemen stehen je zwei einander entsprechende Körper in constantem Verhältniss; oder zwei beliebige Körper des einen Systems verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Körper des anderen Systems.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für Parallelepipeda und Tetraeder, indem wir einige wenige Sätze aus der Stereometrie als bekannt voraussetzen. Seien P und Q zwei beliebige Parallelepipeda des einen Systems Σ, P_1 und Q_1 die resp. entsprechenden von Σ_1. Wir bilden in Σ irgend ein drittes Parallelepipedon R, welches zwischen zwei parallelen Seitenflächen von P und zugleich zwischen zwei solchen von Q liegt, und bestimmen auch zu diesem das entsprechende Parallelepipedon R_1 in Σ_1. Weil nun P und R zwischen parallelen Ebenen liegen, so haben sie gleiche Höhen, und verhalten sich wie ihre Grundflächen; und dasselbe gilt von P_1 und R_1. Die Grundflächen von P und R verhalten sich aber zu einander wie diejenigen von P_1 und R_1, weil die ebenen Systeme, in denen diese Flächenpaare liegen, affin sind. Folglich verhält sich:

$$P : R = P_1 : R_1.$$

Dieselben Schlüsse finden auch auf R, Q, R_1 und Q_1 Anwendung, so dass

$$R : Q = R_1 : Q_1.$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

$$P : Q = P_1 : Q_1,$$

und der Satz ist somit für beliebige Parallelepipeda bewiesen.

Durch jeden Eckpunkt A eines Parallelepipedon (Fig. 12) gehen drei Kanten desselben, welche A mit drei anderen Eckpunkten B, C und D verbinden. Die Diagonalebene $\overline{BCD}$ schneidet vom Parallelepipedon ein Tetraeder $ABCD$ ab, welches dieselbe Höhe, aber nur eine halb so grosse Grundfläche hat wie das Parallelepipedon, und dessen Inhalt also ein Sechstel vom Inhalt des Parallelepipedon beträgt. Schneiden wir von P und Q je ein solches Tetraeder ab, so können wie diese Tetraeder als zwei ganz beliebige des Systems Σ ansehen, weil P und Q ganz beliebig gewählt wurden. Die entsprechenden Tetraeder in Σ sind analog gelegene Stücke von P_1 und Q_1, und da

$$\frac{P}{6} : \frac{Q}{6} = \frac{P_1}{6} : \frac{Q_1}{6},$$

so haben wir bewiesen, dass zwei beliebige Tetraeder des Systems Σ sich zu einander verhalten, wie die entsprechenden beiden Tetraeder von Σ_1.

Aber auch für beliebige von Ebenen begrenzte Körper gilt der Satz, weil dieselben stets in Tetraeder zerlegt werden können. Er muss sogar für krummflächige Körper gelten, weil er für alle ebenflächigen gilt, welche den krummflächigen entweder einge-

schrieben oder umschrieben sind, und deren Inhalte den Inhalten der krummflächigen Körper beliebig nahe gebracht werden können. — Ist das Verhältniss, in welchem zwei homologe Körper zu einander stehen, gleich der Einheit, so werden die affinen räumlichen Systeme „gleich“ genannt. Ebene Systeme, welche in gleichen räumlichen Systemen einander entsprechen, sind im Allgemeinen nicht gleich, sondern nur affin.

Zwei affine Flächen haben entweder keinen Punkt mit der unendlich fernen Ebene gemein, oder sie werden von derselben in je einem Punkte berührt, oder endlich in je einer unendlich fernen Linie geschnitten; denn jedem unendlich fernen Punkte der einen Fläche muss ein unendlich ferner Punkt der anderen entsprechen. Daraus, und weil einer geradlinigen Fläche nur eine geradlinige collinear sein kann (Seite 25), ergiebt sich, dass nur gleichartige Flächen II. Ordnung affin auf einander bezogen werden können; also z. B. zwei Ellipsoide, zwei einfache Hyperboloide, zwei elliptische Paraboloide, zwei eigentliche Kegelflächen u. s. w. Da jeder Schaar paralleler Sehnen der einen Fläche wieder eine Schaar paralleler Sehnen in der affinen Fläche entsprechen muss, und jedem Mittelpunkte einer Sehne der Mittelpunkt der homologen Sehne, so folgt:

„In zwei affinen Flächen II. Ordnung entspricht jeder Durch- „messerebene eine Durchmesserebene, und zwei conjugirten „Durchmessern entsprechen zwei conjugirte Durchmesser.“

Sollen zwei elliptische oder auch zwei hyperbolische Paraboloide Π und Π_1 affin auf einander bezogen werden, so nehmen wir auf jedem derselben eine Curve II. Ordnung an, welche nicht den unendlich fernen Berührungspunkt des Paraboloides enthält, also keine Parabel ist, und beziehen diese beiden Curven affin auf einander; dadurch ist dann jedem Punkte von Π ein solcher von Π_1 zugewiesen. Seien nämlich A, B, C drei Punkte der einen Curve k, und sei D der Pol ihrer Ebene in Bezug auf die Fläche Π, auf welcher k liegt; seien ferner A_1, B_1, C_1 die entsprechenden Punkte der anderen Curve k_1, und D_1 der Pol ihrer Ebene in Bezug auf Π_1, so können und müssen die räumlichen Systeme, in welchen die Paraboloide liegen, affin so auf einander bezogen werden, dass den Eckpunkten des Tetraeders $ABCD$ die resp. Eckpunkte des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ entsprechen. Weil dann die ebenen Systeme ABC und $A_1 B_1 C_1$ ebenfalls affin sind, so entspricht der Curve k die Curve k_1 in der angenommenen

Weise; und die Tangentenkegel der Flächen Π und Π_1, durch welche k und k_1 aus resp. D und D_1 projicirt werden, entsprechen einander. Ferner entsprechen einander die beiden Durchmesser d und d_1 der Flächen Π und Π_1, durch welche die Punkte D und D_1 mit den resp. Mittelpunkten von k und k_1 verbunden werden. Jeder Parabel endlich, welche auf Π liegt und von k in zwei Punkten K und L geschnitten wird, und deren Ebene durch d hindurchgeht, entspricht im zweiten räumlichen Systeme eine Parabel, welche von k in den entsprechenden beiden Punkten K_1 und L_1 geschnitten wird und deren Ebene durch d_1 hindurchgeht; und zwar liegt diese zweite Parabel auf der Fläche Π_1, weil sie mit einer ebenen Schnittcurve derselben ihre unendlich ferne Tangente, ferner die Punkte K_1 und L_1 und endlich noch die Tangenten $\overline{D_1 K_1}$ und $\overline{D_1 L_1}$ gemein hat. Weil nun jeder beliebige Punkt von Π auf irgend einer solchen Parabel liegt, so entspricht ihm ein Punkt von Π_1; d. h. die Flächen Π und Π_1 entsprechen einander.

Ist Π (und ebenso Π_1) ein elliptisches Paraboloid, so wird von demselben durch die Ebene der Ellipse k ein Segment abgeschnitten; dasselbe steht zu dem Kegel, dessen Grundfläche von k begrenzt wird und dessen Spitze der Punkt D ist, in demselben Verhältnisse, wie das entsprechende Segment von Π_1 zu dem entsprechenden Kegel D_1. Da wir nun die Ellipse k willkürlich auf der Fläche Π gewählt haben, so ergiebt sich der Satz:

> „Jedes Segment eines elliptischen Paraboloides steht in „constantem Verhältniss zu dem Kegel, welcher mit dem Seg-„ment die Grundfläche gemein hat, und dessen Spitze im Pole „dieser Grundfläche liegt.“

Durch Rechnung lässt sich, am leichtesten am Rotations-Paraboloid, nachweisen, dass dieses Verhältniss $= \frac{3}{4}$ ist.

Um zwei Ellipsoide affin auf einander zu beziehen, brauchen wir nur die Curven II. Ordnung k und k_1, in welchen sie von je einer beliebigen Durchmesserebene geschnitten werden, affin auf einander zu beziehen, und ausserdem zwei Punkte D und D_1 der Flächen einander zuzuweisen, deren Berührungsebenen jenen resp. Durchmesserebenen parallel sind. Nämlich die beiden räumlichen Systeme, in welchen die Ellipsoide liegen, lassen sich affin auf einander beziehen, so dass die Ellipsen k und k_1 in der angenommenen Weise und ausserdem D und D_1 einander entsprechen. Auch die Mittelpunkte M und M_1 der Ellipsen, welche zugleich

Mittelpunkte der Ellipsoide sind, entsprechen dann einander. Und jeder Ellipse des einen Ellipsoides, welche mit k zwei Punkte K und L gemein hat und deren Ebene den Durchmesser $\overline{MD}$ enthält, entspricht im zweiten räumlichen System eine Ellipse, welche mit k_1 die entsprechenden Punkte K_1 und L_1 gemein hat und deren Ebene durch $\overline{M_1 D_1}$ geht. Diese zweite Ellipse liegt aber auf dem zweiten Ellipsoid, weil sie mit einer Schnittcurve desselben die Punkte D_1, K_1, L_1, sowie die beiden zu $M_1 D_1$ parallelen Tangenten von K_1 und L_1 gemein hat.

Die Ellipsen k und k_1 können wir affin auf einander beziehen, indem wir die Endpunkte von zwei Paar conjugirten Halbmessern einander zuweisen. Die Halbmesser MD und $M_1 D_1$, sind aber in Bezug auf die beiden Ellipsoide den Ebenen von k und k_1 conjugirt. Daraus folgt:

„Um zwei Ellipsoide affin auf einander zu beziehen, können „wir die Endpunkte von zwei Tripeln conjugirter Halbmesser „derselben einander als entsprechende Punkte zuweisen.“

Daraus aber folgt mit Leichtigkeit der Satz:

„Alle Parallelepipeda, deren Seitenflächen ein Ellipsoid in „den Endpunkten von irgend drei conjugirten Durchmessern „berühren, sind inhaltsgleich“;

sie stehen zu dem Inhalte des Ellipsoides in demselben Verhältniss, wie der Inhalt eines Würfels zu demjenigen einer, dem Würfel eingeschriebenen Kugel, also wie $8 : \frac{4\pi}{3}$. Zum Beweise beziehen wir das Ellipsoid affin auf die Kugel. Bezeichnen wir mit J den Inhalt des Ellipsoides und mit $2a$, $2b$, $2c$ die von ihm eingeschlossenen Abschnitte der drei Axen, so ergiebt sich für den Inhalt desjenigen umschriebenen Parallelepipedons, dessen Seitenflächen zu den drei Symmetrieebenen des Ellipsoides parallel laufen, $8 \cdot a \cdot b \cdot c$, und folglich ist:

$$J = \frac{4}{3} a b c \pi.$$

Weil die Kugel durch drei conjugirte Durchmesserebenen in acht gleiche Theile zerlegt wird, so gilt (Seite 54) dasselbe vom Ellipsoid.

Um zwei einfache oder auch zwei zweifache Hyperboloide affin auf einander zu beziehen, brauchen wir nur die Curven II. Ordnung k und k_1, in welchen ihre resp. Asymptotenkegel von zwei beliebigen Berührungsebenen der Flächen geschnitten werden, affin auf einander zu beziehen, und ausserdem die Mittelpunkte der beiden

Flächen einander zuzuordnen. Ich übergehe den Beweis dieses Satzes, weil derselbe dem vorigen ganz analog ist; nur mache ich darauf aufmerksam, dass die Punkte, in welchen jene beiden Ebenen die Hyperboloide berühren, zugleich die Mittelpunkte der Curve k und k_1 sind (vergl. I. Abth. Seite 92), und folglich einander entsprechen müssen. Zwei Berührungsebenen eines zweischaligen Hyperboloides begrenzen mit dem Asymptotenkegel zwei inhaltsgleiche Körper.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 heissen „ähnlich", wenn je zwei homologe Winkel derselben gleich sind. Folglich sind (Seite 52) auch je zwei einander entsprechende ebene Systeme von Σ und Σ_1 ähnlich, und weil somit jeder unendlich fernen Geraden von Σ eine solche von Σ_1 entspricht, so sind die räumlichen Systeme affin. Je zwei homologe Strecken ähnlicher Systeme stehen in constantem Verhältniss zu einander, wie sich schon daraus ergiebt, dass dieser Satz für ähnliche ebene Systeme bereits bewiesen ist. Haben zwei ähnliche räumliche Systeme solche Lage, dass irgend drei Gerade des einen, die weder einer Ebene parallel, noch zu einander normal sind, mit den ihnen entsprechenden Geraden des anderen Systems parallel laufen, so müssen je zwei homologe Gerade oder Ebenen der Systeme parallel sein, die Systeme haben ihr unendlich fernes ebenes System entsprechend gemein, und liegen perspectivisch (Seite 27). Je zwei homologe Punkte liegen folglich mit einem festen Collineations-Centrum, dem „Aehnlichkeitspunkt", in einer Geraden.

Wenn in zwei ähnlichen räumlichen Systemen die homologen Strecken gleich sind, so nennen wir die Systeme entweder „congruent" oder „symmetrisch". Bringen wir nämlich die Systeme in solche Lage, dass sie einen Strahlenbündel entsprechend gemein haben, so fallen entweder je zwei homologe Punkte zusammen, oder die von ihnen begrenzte Strecke wird vom Mittelpunkte des Strahlenbündels halbirt. Im ersteren Falle sind die Systeme congruent, im zweiten symmetrisch. Z. B. die Schnittcurve von zwei concentrischen Flächen II. Ordnung liegt symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt der Flächen und kann aus zwei nicht zusammenhängenden, symmetrischen Linien bestehen.

Neunter Vortrag.

Reciproke Systeme, welche in einander liegen. Polarsysteme in der Ebene und im Raume.

Wenn zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 auf einander gelegt werden, so kann jeder Punkt ihrer Ebene sowohl zu Σ als auch zu Σ_1 gerechnet werden; ihm entsprechen also zwei Strahlen, einer in Σ_1 und einer in Σ. Ebenso entsprechen jeder Geraden der Ebene zwei Punkte, weil wir die Gerade zu jedem der reciproken Systeme zählen können. Es wird deshalb zweckmässig sein, wenn wir die Elemente der Ebene mit je zwei Buchstaben bezeichnen, z. B. einen beliebigen Punkt mit AB_1. Dem Punkte A von Σ entspricht dann im Systeme Σ_1 ein Strahl a_1; und dem nämlichen Punkte, wenn wir ihn zu Σ_1 rechnen und mit B_1 bezeichnen, entspricht in Σ ein Strahl b. Bei in einander liegenden projectivischen Punktreihen haben wir früher untersucht, ob und wie viele Punkte der einen mit den entsprechenden Punkten der andern zusammenfallen, und unter welchen Umständen die Punktreihen involutorisch liegen. Ebenso wollen wir hier die analogen Fragen erörtern: Wie viele Punkte liegen auf den ihnen entsprechenden Geraden? und wann fallen die beiden Geraden, welche jedem Punkte der Ebene entsprechen, auf einander?

Wenn ein Punkt AB_1 auf dem einen a_1 der beiden Strahlen liegt, die ihm entsprechen, so liegt er auch auf dem anderen b. Denn dem Punkte B_1 der Punktreihe a_1 entspricht in Σ zufolge der Definition der reciproken Verwandtschaft ein Strahl b des Büschels A. Ebenso geht eine beliebige Gerade pq_1 entweder durch keinen oder durch jeden der beiden Punkte P_1 und Q, welche ihr entsprechen.

Projiciren wir die reciproken Systeme Σ und Σ_1 aus zwei beliebigen Punkten S und S_1 durch Strahlenbündel, so sind auch diese reciprok und erzeugen eine Fläche II. Ordnung. Jeder Punkt der Ebene, welcher auf den ihm entsprechenden Geraden liegt, gehört auch dieser Fläche II. Ordnung an, weil in ihm ein Strahl des Bündels S von der entsprechenden Ebene des Bündels

S_1 geschnitten wird. Umgekehrt liegt jeder Punkt, welchen die Fläche II. Ordnung mit der Ebene gemein hat, auf den beiden Geraden, die ihm in den reciproken Systemen Σ und Σ_1 entsprechen. Je nachdem nun die Fläche II. Ordnung mit der Ebene eine Curve II. Ordnung, oder zwei Gerade, oder nur eine Gerade, oder einen einzigen Punkt, oder endlich gar keinen reellen Punkt gemein hat, tritt einer der folgenden Fälle ein:

„Wenn zwei reciproke Systeme in derselben Ebene liegen, „so bilden die sämmtlichen (reellen) Punkte der Ebene, welche „auf ihren entsprechenden Geraden liegen, entweder eine Curve „II. Ordnung, oder ein System von zwei Geraden, oder eine „Gerade, oder es giebt nur einen einzigen oder endlich gar „keinen solchen Punkt. Zugleich bilden die (reellen) Strahlen „der Ebene, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte „hindurchgehen, entweder einen Büschel II. Ordnung, oder ein „System von zwei Büscheln I. Ordnung, oder einen Büschel „I. Ordnung, oder es giebt nur einen einzigen oder endlich „gar keinen solchen Strahl."

Die Strahlengebilde, welche in der zweiten Hälfte des Satzes genannt sind, entsprechen den Punktgebilden der ersten Hälfte und liegen zu denselben in doppelter Weise perspectivisch.

Im Allgemeinen hat die Fläche II. Ordnung entweder gar keinen Punkt mit der Ebene gemein, oder eine Curve II. Ordnung; denn wenn die Ebene zwei oder eine Gerade oder nur einen Punkt der Fläche enthält, so berührt sie die Fläche, und hat zu derselben eine ganz besondere Lage. Von den im Satze genannten Fällen tritt also im Allgemeinen entweder der erste oder der letzte ein, und nur ausnahmsweise einer der übrigen. So z. B. werden wir finden, dass bei reciproken Systemen, welche involutorische Lage haben, niemals diese besonderen Fälle stattfinden können.

Die involutorische Lage reciproker ebener Systeme tritt dann ein, wenn jedem Punkte der Ebene zwei Gerade entsprechen, welche zusammenfallen, wenn also jedem Punkte eine Gerade in doppelter Weise entspricht. Dass diese involutorische Lage möglich ist, erhellt aus folgendem Satz:

„Zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch, „wenn den Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks von Σ die ihnen „gegenüber liegenden Seiten a_1, b_1, c_1 desselben Dreiecks in „Σ_1 entsprechen" (Fig. 13).

Zunächst leuchtet ein, dass die Eckpunkte des Dreiecks den gegenüber liegenden Seiten in doppelter Weise entsprechen. Bezeichnen wir z. B. mit A_1 den zu Σ_1 gehörigen Schnittpunkt von b_1 und c_1, welcher mit dem Punkte A von Σ zusammenfällt, so entspricht ihm in Σ die Dreiecksseite a, welche die Eckpunkte B und C verbindet und mit der Geraden a_1 von Σ_1 zusammenfällt.

Dem Strahlenbüschel $A A_1$ entspricht folglich auch die Punktreihe $a_1 a$ in doppelter Weise; und da dem Strahle $b b_1$ dieses Büschels der Punkt $B_1 B$ und dem Strahle $c c_1$ der Punkt $C_1 C$ doppelt entspricht, so liegt der Büschel $A A_1$ involutorisch zu der Punktreihe $a_1 a$ (I. Abth. Seite 123). Jedem beliebigen Strahle des Büschels $A A_1$ muss also ein Punkt des geraden Gebildes $a_1 a$ doppelt entsprechen; und ebenso ergiebt sich, dass jedem Strahle der Büschel $B B_1$ oder $C C_1$ ein Punkt von resp. $b_1 b$ oder $c_1 c$ doppelt entspricht. Sei nun ein beliebiger Strahl p_1 oder p in der Ebene gegeben, so schneidet dieser die Dreiecksseiten in drei Punkten, welchen drei Strahlen der Büschel $A A_1$, $B B_1$ und $C C_1$ doppelt entsprechen. Also muss auch dem Strahle $p_1 p$ derjenige Punkt $P P_1$ in doppelter Weise entsprechen, in welchem jene drei Strahlen sich schneiden; oder die reciproken Systeme liegen involutorisch.

Wir können die beiden involutorisch liegenden Systeme auch als ein einziges System betrachten, in welchem jedem Punkte eine Gerade und jeder Punktreihe ein zu ihr involutorisch liegender Strahlenbüschel „zugeordnet" ist; wir nennen dieses System ein „ebenes Polarsystem". Jeder Punkt desselben, welcher auf der ihm zugeordneten Geraden liegt, soll ein „Ordnungspunkt", und diese Gerade soll ein „Ordnungsstrahl" des Systems genannt werden. Dann lässt sich beweisen:

> „Ein ebenes Polarsystem hat entweder gar keine oder un-
> „endlich viele reelle Ordnungspunkte und Ordnungsstrahlen.
> „Im letzteren Falle erfüllen die Ordnungspunkte eine Curve
> „II. Ordnung, welche von den Ordnungsstrahlen berührt wird
> „und die Ordnungscurve oder Directrix des Polarsystems heisst."

Sei A (Fig. 14) ein Punkt des Polarsystems, welcher auf der ihm zugeordneten Geraden a liegt; dann muss jeder von A verschiedene Punkt B der Geraden a ausserhalb der ihm zugeordneten Geraden b liegen, weil b durch A geht und nicht mit a zusammenfallen kann. Weil ausserdem die Punktreihe b zu dem Strahlenbüschel B und folglich zu einem Schnitte desselben in-

volutorisch liegt, so enthält sie ausser A noch einen zweiten Ordnungspunkt C (I. Abth. Seite 120). Das Polarsystem enthält also unendlich viele Ordnungspunkte, sobald ein solcher vorhanden ist. Lägen nun alle diese Ordnungspunkte in einer Geraden, so würde keineswegs auf einem beliebigen Strahle, welcher einen Ordnungspunkt A enthält, noch ein zweiter Ordnungspunkt liegen; und erfüllten sie zwei Gerade, so würde einem beliebigen Punkte A der einen Geraden ein Strahl a zugeordnet sein, welcher die andere Gerade in noch einem Ordnungspunkte schnitte, während doch jeder Ordnungsstrahl a nur einen einzigen Ordnungspunkt A enthalten darf. Die Ordnungspunkte des Systems erfüllen sonach (Seite 61) eine Curve II. Ordnung, und dieselbe wird von den Ordnungsstrahlen berührt, weil jeder der letzteren nur einen einzigen Ordnungspunkt mit der Curve gemein hat.

Hieraus ergeben sich auf's Neue die Eigenschaften der Polarität von Curven II. Ordnung; zugleich aber erkennen wir die Möglichkeit von Polarsystemen, welche keine reellen Ordnungscurven besitzen. Auch auf diese Polarsysteme wollen wir nun die Bezeichnungen anwenden, welche wir früher bei der Untersuchung der Polarität von Curven II. Ordnung eingeführt haben. Namentlich soll im Polarsystem jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden genannt werden, und umgekehrt jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes. Ferner heissen zwei Punkte des Polarsystems conjugirt, wenn jeder auf der Polare des andern liegt, und zwei Strahlen, wenn jeder durch den Pol des andern geht. Endlich soll jedes Dreieck im Polarsystem, dessen Eckpunkte die Pole der gegenüber liegenden Seiten sind, in welchem also je zwei Eckpunkte und je zwei Seiten conjugirt sind, ein „Poldreieck“ genannt werden.

„In einem ebenen Polarsystem sind unendlich viele Pol-
„dreiecke enthalten.“

Man construirt ein Poldreieck, indem man auf einer beliebigen Geraden a (Fig. 13), die nicht durch ihren Pol A geht, irgend einen Punkt B annimmt, welcher nicht auf seiner Polare b liegt, und endlich noch den Schnittpunkt C der Geraden a und b bestimmt. Da C der Pol von AB ist, so ist das Dreieck ABC ein Poldreieck.

„Zwei beliebige Poldreiecke ABC und DEF eines ebenen
„Polarsystems sind einer Curve II. Ordnung eingeschrieben
„und einer anderen umschrieben.“

Der früher (I. Abth. Seite 122) gegebene Beweis dieses Satzes gilt nämlich auch für den Fall, dass das Polarsystem keine Ordnungscurve hat.

„Wird in einer Ebene ein beliebiges Dreieck ABC als „Poldreieck angenommen, und ausserdem irgend einem Punkte „P (Fig. 13), welcher auf keiner Seite des Dreiecks liegt, eine „Gerade p zugeordnet, welche durch keinen Eckpunkt desselben „geht, so ist dadurch ein ebenes Polarsystem bestimmt.“

Wir können und müssen nämlich die beiden Systeme, aus welchen das Polarsystem gebildet wird, reciprok so auf einander beziehen, dass den vier Punkten A, B, C, P des einen die resp. Geraden $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, p des anderen entsprechen. Dann haben (Seite 61) diese beiden Systeme involutorische Lage, wie verlangt wird.

„Wenn das Polarsystem eine Ordnungscurve hat, so schliesst „diese von jedem Poldreieck ABC einen Eckpunkt ein und „die beiden anderen Eckpunkte aus.“

Liegt nämlich der Eckpunkt A innerhalb der Ordnungscurve, so liegen alle Punkte seiner Polare $\overline{BC}$ ausserhalb derselben; und liegt A ausserhalb der Curve, so wird diese von der Polare $\overline{BC}$ geschnitten, und je zwei conjugirte Punkte dieser Polare, wie z. B. B und C, sind folglich durch die Curve harmonisch getrennt, so dass einer derselben innerhalb, der andere ausserhalb der Curve liegt.

Um zu entscheiden, ob ein gegebenes Polarsystem eine Ordnungscurve hat oder nicht, brauchen wir hiernach nur zu untersuchen, ob zwei von den Seiten irgend eines Poldreiecks Ordnungspunkte enthalten oder nicht, oder was dasselbe ist, ob die Punktreihen, welche in diesen Seiten liegen, zu den ihnen zugeordneten Strahlenbüscheln entgegengesetzt oder einstimmig involutorisch liegen (I. Abth. Seite 120). Die Aufgabe, von einem Polarsystem die Ordnungscurve zu construiren, gehört zu denjenigen zweiten Grades und ist leicht zu lösen mittelst der Construction, durch welche in einer involutorischen Punktreihe die Ordnungspunkte gefunden werden.

„Durch ein einfaches ebenes Fünfeck $ABCDE$ ist ein „Polarsystem bestimmt, in welchem jede Seite des Fünfecks „die Polare des ihr gegenüberliegenden Eckpunktes ist.“

Ist nämlich F der Schnittpunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, so können wir ADF als Poldreieck eines Polarsystems auffassen, in welchem E der Pol von BC ist; in diesem völlig bestimmten Polarsysteme

sind A, B, C und D die Pole der ihnen gegenüberliegenden Fünfeckseiten $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ und $\overline{AB}$.

Projiciren wir ein ebenes Polarsystem Σ aus einem beliebigen Punkte S, welcher nicht in Σ liegt, so erhalten wir einen „polaren Strahlenbündel". Jedem Strahle des Bündels S ist eine Ebene desselben zugeordnet, und umgekehrt. Hat das ebene Polarsystem eine Ordnungscurve, so wird dieselbe durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, welche die „Ordnungsfläche" oder „Directrix" des polaren Strahlenbündels genannt wird. Je zwei Strahlen oder Ebenen des Bündels sind conjugirt, wenn sie in Bezug auf die Ordnungsfläche desselben conjugirt sind, und umgekehrt.

Unter den polaren Strahlenbündeln verdient der „rechtwinklige" hervorgehoben zu werden; in demselben ist jeder Strahl zu der ihm zugeordneten Ebene normal, und schneiden sich je zwei conjugirte Strahlen oder Ebenen rechtwinklig. Da zwei beliebige Poldreikante eines polaren Strahlenbündels einer Kegelfläche zweiter Ordnung eingeschrieben und einer anderen umschrieben sind, so ergiebt sich für den rechtwinkligen Bündel:

> „Zwei rechtwinklige Dreikante, deren Mittelpunkte zu-
> „sammenfallen, sind einer Kegelfläche II. Ordnung eingeschrieben
> „und einer anderen umschrieben."

Man kann hieraus den Satz ableiten, dass einer Kegelfläche II. Ordnung entweder keine oder unendlich viele rechtwinklige Dreikante um- oder auch eingeschrieben werden können.

Wir wollen jetzt für zwei reciproke räumliche Systeme analoge Untersuchungen ausführen wie diejenigen, welche soeben für reciproke ebene Systeme beendigt wurden. Die bisher gewonnenen Resultate werden uns dabei von wesentlichem Nutzen sein. Wir schliessen bei dieser Untersuchung den besonderen Fall vorläufig aus, in welchem jede Ebene des einen Systems durch den ihr entsprechenden Punkt des anderen hindurchgeht; dieser interessante Fall wird den Gegenstand des nächsten Vortrages bilden.

Sei nun α eine beliebige Ebene des einen räumlichen Systems Σ, welche nicht durch den ihr entsprechenden Punkt A_1 des anderen Systems Σ_1 hindurchgeht. Dann entspricht dem ebenen System α von Σ ein zu ihm reciproker Strahlenbündel A_1 von Σ_1. Wir können diesen Bündel durch die Ebene α in einem zweiten ebenen System α_1 schneiden, welches dann auch zu dem ersten in α liegenden System reciprok ist. Jeder Punkt von α, welcher in der ihm entsprechenden Geraden von α_1 liegt, ist auch auf der ihm

entsprechenden Ebene des Bündels A_1 enthalten, und ausserdem wissen wir bereits, dass alle solche Punkte, wenn überhaupt deren in α vorkommen, eine Curve II. Ordnung bilden, welche auch in zwei Gerade zerfallen, oder sich auf eine Gerade oder auf einen einzigen Punkt reduciren kann.

Sei ferner β eine Ebene von Σ, welche durch den ihr entsprechenden Punkt B_1 von Σ_1 hindurchgeht. Rechnen wir alsdann dieselbe Ebene zu Σ_1 und bezeichnen sie demgemäss etwa mit γ_1, so entspricht ihr in Σ ein Punkt C, welcher auf β liegen muss, weil γ_1 durch B_1 hindurchgeht. Dem Strahlenbüschel C von Σ, welcher in der Ebene β liegt, entspricht in Σ_1 ein ihm projectivischer Strahlenbüschel der mit β identischen Ebene γ_1, dessen Mittelpunkt B_1 ist. Diese Strahlenbüschel erzeugen eine Curve II. Ordnung, welche jedoch in zwei Gerade zerfallen kann, und von welcher jeder Punkt auf den ihm entsprechenden Ebenen der reciproken räumlichen Systeme liegt. Denn sei P derjenige Punkt, in welchem ein beliebiger Strahl p des Büschels C von dem entsprechenden Strahle p_1 der Ebene γ_1 geschnitten wird, so entspricht diesem Punkte P des Strahles p eine Ebene π_1 des Systems Σ_1, welche durch den Strahl p_1 und damit auch durch den Punkt P selbst hindurchgeht. Hieraus folgt:

„Der Ort aller Punkte des Raumes, welche auf den ihnen „entsprechenden Ebenen der reciproken Systeme liegen, ist „eine Fläche II. Ordnung; und alle Ebenen, welche durch die „ihnen entsprechenden Punkte gehen, bilden einen Ebenen-„bündel II. Ordnung."

Denn wir haben bewiesen, dass der geometrische Ort dieser Punkte mit jeder beliebigen Ebene α oder β, welche überhaupt solche Punkte enthält, eine Curve II. Ordnung, oder zwei Gerade, oder eine Gerade, oder endlich einen einzigen Punkt gemein hat, und diese Eigenschaft kommt nur der Fläche II. Ordnung zu. Der Ebenenbündel II. Ordnung, welcher in der zweiten Hälfte des Satzes genannt wurde, entspricht in jedem der reciproken Systeme jener Fläche II. Ordnung. Durch unseren Satz ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass kein reeller Punkt des Raumes auf den ihm entsprechenden Ebenen liege; auch kann die Fläche II. Ordnung bei besonderer Lage der reciproken Systeme in zwei Ebenen zerfallen.

„Zwei reciproke räumliche Systeme Σ und Σ_1 liegen involu-„torisch, wenn den Eckpunkten A, B, C, D eines Tetraeders

„von Σ die ihnen gegenüber liegenden Seitenflächen α_1, β_1, γ_1, δ_1 „desselben Tetraeders in Σ_1 entsprechen."

Dem Schnittpunkte der Ebenen β_1, γ_1, δ_1, d. h. dem Punkte A von Σ_1, entspricht auch in Σ die Ebene $\overline{BCD}$ oder α_1, und ebenso entspricht jedem anderen Eckpunkte des Tetraeders die gegenüber liegende Seitenfläche in doppelter Weise. Daraus folgt, dass das ebene System α_1 zu dem ihm reciproken Strahlenbündel A involutorisch liegt; denn es hat (Seite 61) zu einem Schnitt desselben involutorische Lage. Jedem Punkte oder Strahle von α_1 (und ebenso von β_1, γ_1 oder δ_1) entspricht also eine Ebene oder ein Strahl von A (resp. von B, C oder D) in doppelter Weise. Und folglich muss jeder beliebigen Ebene, welche von α_1, β_1, γ_1, δ_1 in irgend vier Geraden geschnitten wird, derjenige Punkt doppelt entsprechen, welcher aus A, B, C, D durch die entsprechenden vier Strahlen projicirt wird.

Wir können die involutorisch liegenden räumlichen Systeme Σ und Σ_1 als ein einziges System betrachten, in welchem jedem Punkte eine Ebene und jeder Geraden eine Gerade zugeordnet ist. Dieses System wird ein „räumliches Polarsystem" genannt, und jeder Punkt heisst der Pol der ihm zugeordneten Ebene, jede Gerade oder Ebene heisst die Polare des ihr zugeordneten Strahles resp. Punktes. Wenn das Polarsystem Punkte enthält, die auf ihren Polarebenen liegen, so sind dieselben (Seite 66) auf einer Fläche II. Ordnung enthalten, der sogenannten „Ordnungsfläche" oder Directrix des Polarsystems. Dass umgekehrt durch eine Fläche II. Ordnung, welche keine Kegelfläche ist, ein räumliches Polarsystem bestimmt wird, dessen Directrix jene Fläche ist, zeigen die Entwickelungen des sechsten Vortrages. Die dort (Seite 40) gegebene Definition conjugirter Punkte, Strahlen und Ebenen soll hinfort für jedes räumliche Polarsystem gelten, auch wenn dasselbe keine Ordnungsfläche besitzt.

Im räumlichen Polarsystem soll ferner jedes Tetraeder, dessen Eckpunkte die Pole der gegenüberliegenden Seitenflächen sind, ein „Pol-Tetraeder" genannt werden; von demselben sind je zwei Eckpunkte conjugirt, und ebenso je zwei Seitenflächen oder Kanten. Im räumlichen Polarsystem sind unendlich viele ebene Polarsysteme, polare Strahlenbündel und Pol-Tetraeder enthalten. Weil nämlich jeder Strahlenbündel A, dessen Mittelpunkt ausserhalb des ihm zugeordneten ebenen Systems α liegt, zu dem letzteren reciprok ist und involutorisch liegt, so erscheint

die Ebene α als Träger eines Polarsystems, in welchem jedem Punkte die ihm conjugirte Gerade zugeordnet ist; und ebenso erscheint der Punkt A als Mittelpunkt eines polaren Strahlenbündels. Jedes Poldreieck des ebenen Polarsystems wird aus dem Punkte A durch ein „Poldreikant" des polaren Strahlenbündels projicirt, und bildet mit diesem ein Pol-Tetraeder des räumlichen Polarsystems. Jedes ebene Polarsystem α, welches dem räumlichen angehört, hat auch dann einen „Mittelpunkt" und „Durchmesser", wenn es keine Ordnungscurve besitzt. Der Mittelpunkt ist der unendlich fernen Geraden des Polarsystems α zugeordnet, und jeder Durchmesser einem unendlich fernen Punkte von α. Die Durchmesser sind paarweise conjugirt, und zwei derselben stehen ausserdem auf einander senkrecht und heissen die „Axen" des Polarsystems α. Ebenso sollen die drei conjugirten Strahlen des polaren Strahlenbündels A, welche paarweise auf einander senkrecht stehen, die „Hauptaxen" des Bündels A genannt werden, auch wenn der Bündel keinen Ordnungskegel besitzt.

„Wird ein Tetraeder $ABCD$ als Pol-Tetraeder angenommen „und noch irgend einem Punkte E, welcher auf keiner Fläche „des Tetraeders liegt, eine Ebene ε zugeordnet, welche durch „keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, so ist dadurch ein „räumliches Polarsystem bestimmt."

Wir können nämlich zwei räumliche Systeme reciprok so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E die resp. Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC und ε entsprechen (Seite 22). Die beiden Systeme liegen alsdann involutorisch (Seite 66) und bilden zusammen das Polarsystem.

Das Polarsystem in der Ebene ε, welches zu diesem räumlichen Polarsysteme gehört, ist durch den Schnitt der Ebene mit dem vollständigen räumlichen Fünfeck $ABCDE$ völlig bestimmt. Nämlich jede der zehn Kanten AB, AC, ..., DE dieses Fünfecks ist in dem räumlichen Polarsysteme der ihr gegenüberliegenden Fläche CDE, BDE, ..., ABC conjugirt, und je zwei einander gegenüberliegende Elemente des Fünfecks gehen deshalb durch zwei einander zugeordnete Elemente des ebenen Polarsystems. Also:

„Die zehn Paar einander gegenüberliegenden Elemente (Kanten „und Flächen) eines räumlichen Fünfecks werden von einer „beliebigen, durch keinen Eckpunkt gehenden Ebene in zehn „Paar einander zugeordneten Elementen (Polen und Polaren) „eines ebenen Polarsystems geschnitten."

Die Schnittfigur besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden; auf jeder der letzteren liegen drei von den 10 Punkten, und durch jeden von diesen gehen drei von den 10 Geraden. Projicirt man drei von den Eckpunkten des Fünfecks aus den beiden übrigen auf die Schnittebene, so erhält man zwei perspectivische Dreiecke, und überzeugt sich leicht, dass die Configuration der 10 Punkte und 10 Geraden identisch ist mit einer früher beschriebenen (I. Abth. Seite 4). Das von vier der fünf Eckpunkte gebildete Tetraeder wird von der Ebene in einem Polvierseit des ebenen Polarsystems geschnitten (vgl. I. Abth. Seite 191); seine Projection in der Ebene aus dem fünften Eckpunkte ist ein Polviereck des ebenen Polarsystems, und zwar gehen die sechs Seiten dieses Polvierecks durch die sechs Eckpunkte jenes Polvierseits.

Zwei Ebenenbüschel mit nicht conjugirten Axen sind projectivisch, wenn jeder Ebene des einen die ihr conjugirte Ebene des anderen entspricht (vgl. Seite 41). Sind nun $ABCD$ und $EFGH$ zwei beliebige Poltetraeder eines räumlichen Polarsystems, so ist folglich $\overline{AB}(CDGH) \barwedge \overline{EF}(DCHG)$; denn z. B. den Ebenen ABC und ABH sind die resp. Ebenen EFD und EFG conjugirt, weil D und H die Pole von ABC und EFG sind. Da nun $\overline{EF}(DCHG) \barwedge \overline{EF}(CDGH)$ ist (I. Abth. Seite 122), so ergiebt sich $\overline{AB}(CDGH) \barwedge \overline{EF}(CDGH)$, oder:

„Die Eckpunkte von zwei Poltetraedern eines räumlichen „Polarsystems können mit je zwei nicht conjugirten Kanten „der Tetraeder durch eine geradlinige Fläche II. Ordnung ver- „bunden werden.“

Zehnter Vortrag.

Das Nullsystem und der lineare Strahlencomplex.

Wenn zwei reciproke räumliche Systeme solche Lage haben, dass jede Ebene des einen durch den ihr entsprechenden Punkt des anderen geht, so liegen sie involutorisch und bilden zusammen ein sogenanntes Nullsystem. Zunächst nämlich leuchtet ein, dass keine Gerade g des einen Systems von der entsprechenden g_1 des

anderen geschnitten wird; denn sonst würden nicht alle, sondern nur zwei Punkte der Punktreihe g auf den entsprechenden Ebenen des Büschels g_1 liegen: der Punkt gg_1 und derjenige Punkt, welchem die Ebene $g_1 g$ entspricht. Zwei homologe Strahlen g, g_1 der reciproken Räume sind demnach entweder zu einander windschief, oder sie fallen zusammen. Nun entsprechen aber allen Strahlen eines Punktes P die Strahlen einer durch P gehenden Ebene π_1; die in dieser Ebene liegenden Strahlen von P fallen folglich mit den ihnen entsprechenden zusammen, weil sie mit ihnen in der Ebene π_1 liegen. Dem Schnittpunkte P dieser sich selbst entsprechenden Geraden muss somit die Verbindungsebene π_1 der Geraden doppelt, d. h. in jedem der beiden reciproken Räume, entsprechen.

Weil demnach die reciproken räumlichen Systeme involutorisch liegen, so können sie als ein einziges System aufgefasst werden, dessen Elemente paarweise einander zugeordnet sind. Wir nennen mit Möbius und v. Staudt dieses involutorische System ein „Nullsystem“; jedem Punkte desselben ist eine Ebene als Polare oder „Nullebene“ zugeordnet, jeder Ebene ein Punkt als Pol oder „Nullpunkt“, und jeder Geraden eine Gerade als Polare. Das Nullsystem hat demnach u. A. folgende Eigenschaften:

„Im Nullsystem geht jede Ebene durch ihren Pol und liegt „jeder Punkt in seiner Polarebene; jede Gerade, welche mit „ihrer Polare in einer Ebene liegt, fällt mit derselben zu„sammen; jede Punktreihe liegt zu dem ihr zugeordneten „Ebenenbüschel perspectivisch; jedes ebene System hat mit „dem ihm zugeordneten Strahlenbündel einen Strahlenbüschel „entsprechend gemein und ist zu ihm reciprok.“

Jede sich selbst zugeordnete Gerade soll ein „Leitstrahl“ des Nullsystems heissen. Für diese Leitstrahlen gilt der Satz:

„Alle durch einen Punkt P gehenden oder aber in einer „Ebene ε liegenden Leitstrahlen des Nullsystems bilden einen „Strahlenbüschel erster Ordnung“;

denn sie liegen in der Nullebene von P resp. gehen durch den Nullpunkt von ε. Die Gesammtheit der Leitstrahlen des Nullsystems führt deshalb den Namen „linearer Strahlencomplex“. Zwei sich schneidende Strahlen dieses Complexes liegen allemal in einem Büschel I. Ordnung, dessen sämmtliche Strahlen dem Complex angehören.

Sind a und a_1 zwei einander zugeordnete windschiefe Gerade,

so liegt jeder Punkt der einen in der ihm zugeordneten Ebene der anderen; daraus aber folgt:

„Jeder Strahl, welcher zwei einander zugeordnete windschiefe „Gerade a, a_1 schneidet, ist ein Leitstrahl des Nullsystems; „und jeder Leitstrahl, welcher eine Gerade a schneidet, muss „auch mit der Polare a_1 dieser Geraden in einer Ebene liegen. „Zwei Paar zugeordnete Gerade des Nullsystems, die sich nicht „wechselsweise schneiden, liegen folglich in einer Regelschaar, „deren Leitschaar aus Leitstrahlen des Nullsystems besteht „und dem linearen Strahlencomplex angehört. Drei windschiefe „Strahlen des linearen Complexes bestimmen eine in dem „Complex enthaltene Regelschaar“;

denn die sie schneidenden Geraden sind in dem Nullsysteme paarweise einander zugeordnet.

Zwei Paar zugeordnete Gerade a, a_1 und b, b_1 des Nullsystems schneiden eine beliebige Ebene in zwei Punktenpaaren, die auf zwei durch den Nullpunkt der Ebene gehenden Leitstrahlen liegen; durch a, a_1 und b, b_1 ist also der Nullpunkt jeder Ebene und ebenso die Nullebene jedes Punktes bestimmt.

„Durch ein einfaches räumliches Fünfeck $ABCDE$ ist ein „Nullsystem bestimmt, in welchem jede der fünf Kanten des Fünf„ecks sich selbst und folglich jeder Eckpunkt der Ebene zugeordnet „ist, die ihn mit den beiden benachbarten Eckpunkten verbindet.“

Beziehen wir nämlich zwei räumliche Systeme reciprok auf einander, sodass den Punkten A, B, C, D, E des einen die resp. Ebenen EAB, ABC, BCD, CDE, DEA des anderen entsprechen, so entspricht die Kante $\overline{AB}$ und ebenso jede andere Kante sich selbst; denn $\overline{AB}$ ist einerseits die Verbindungslinie der Punkte A und B, anderseits die Schnittlinie der ihnen entsprechenden Ebenen EAB und ABC. Wenn nun die beiden reciproken Systeme kein Nullsystem zusammen bildeten, so müsste der Ort aller Punkte, die auf ihren entsprechenden Ebenen liegen, eine durch die fünf Kanten des Fünfecks gehende Fläche II. Ordnung sein (Seite 66); diese Fläche aber würde mit einer beliebigen Ebene des Fünfecks, z. B. mit ABC, zwei Gerade $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, ausserdem aber einen auf $\overline{DE}$ liegenden Punkt gemein haben, was unmöglich ist. Die reciproken Systeme bilden also wirklich ein Nullsystem.

„Durch drei windschiefe Gerade g, g_1, l ist ein Nullsystem „bestimmt, in welchem g und g_1 einander zugeordnet sind „und l ein Leitstrahl ist.“

Legen wir nämlich durch g_1 zwei beliebige Ebenen $g_1 AE$ und $g_1 CD$, welche mit g die Punkte A und C, mit l aber die Punkte E und D gemein haben, und bezeichnen ferner mit B einen beliebigen Punkt von g_1, so sind die Kanten des einfachen räumlichen Fünfecks $ABCDE$ fünf Leitstrahlen des Nullsystems. In demselben ist auch die Kante $\overline{DE}$ oder l ein Leitstrahl, und der Geraden $\overline{AC}$ oder g ist die Schnittlinie g_1 der Fünfeckebenen EAB und BCD zugeordnet. — Um direct mittelst der drei Geraden g, g_1, l von einem Punkt P die Nullebene zu construiren, bestimme man zunächst den Nullpunkt der Ebene $\overline{Pl}$; derselbe liegt auf l und mit den beiden Punkten, in welchem g und g_1 die Ebene treffen, in einer Geraden. Der Leitstrahl, welcher diesen Nullpunkt mit P verbindet, liegt mit demjenigen, in welchem die Ebenen $\overline{Pg}$ und $\overline{Pg_1}$ sich schneiden, in der gesuchten Nullebene des Punktes P.

„Fünf beliebige Gerade a, b, c, d, e bestimmen im All„gemeinen ein Nullsystem, von welchem sie Leitstrahlen sind, „also auch einen sie enthaltenden linearen Strahlencomplex.“

Es giebt nämlich im Allgemeinen zwei und nur zwei Gerade g, g_1, welche die vier Geraden a, b, c, d schneiden; dieselben sind in dem Nullsystem einander zugeordnet und bestimmen dasselbe in Gemeinschaft mit dem Leitstrahle e, falls sie zu einander und zu e windschief sind. Wenn diese beiden Geraden nicht reell, und folglich a, b, c, d (und e) zu einander windschief sind, so bestimmen a, b, e und c, d, e zwei Regelschaaren, welche aus Leitstrahlen des zu ermittelnden Nullsystems bestehen. Greift man aus diesen beiden Regelschaaren zwei Strahlenpaare a', b' und b', d', heraus, welche von irgend einer Geraden g und also noch von einer anderen Geraden g_1 geschnitten werden, so bestimmen a', b', c', d' und e oder auch g, g_1 und e auf die vorhin angegebene Weise das Nullsystem. Ausnahmen erleidet der Satz, wenn von den fünf Geraden a, b, c, d, e drei in einer Ebene oder in einem Strahlenbündel, oder aber vier in einer Regelschaar liegen; desgleichen, wenn sie alle von einer Geraden g geschnitten werden.

„Ein Nullsystem ist auch bestimmt durch zwei Paar zu„geordnete Gerade p, p_1 und q, q_1, die in einer Regelschaar „liegen.“

Sind nämlich a, b, c drei Leitstrahlen dieser Regelschaar, und d, e zwei Gerade, von denen die eine p und p_1, die andere q und q_1 schneidet, so hat das Nullsystem die Geraden a, b, c, d, e zu Leitstrahlen und ist auch durch sie bestimmt. — Wenn eine

Gerade die Regelschaar pp_1q beschreibt, so beschreibt die ihr zugeordnete Gerade, indem auch sie die drei Leitstrahlen a, b, c beständig schneidet, die Regelschaar p_1pq_1; diese beiden Regelschaaren aber sind projectivisch und liegen involutorisch. Statt des letzten Satzes können wir demnach auch sagen:

„Durch eine involutorische Regelschaar $pp_1 \cdot qq_1$ ist ein „dieselbe enthaltendes Nullsystem bestimmt."

Das Involutionscentrum der involutorischen Curve II. Ordnung, in welcher die Regelschaar von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, ist der Nullpunkt dieser Ebene; und die Involutionsebene des involutorischen Ebenenbüschels II. Ordnung, durch welchen die Regelschaar aus irgend einem Punkte projicirt wird, ist die Nullebene dieses Punktes. Im Nullsysteme sind unendlich viele involutorische Regelschaaren enthalten.

Der durch fünf windschiefe Strahlen a, b, c, d, e gehende lineare Strahlencomplex enthält die zehn Regelschaaren abc, abd, ..., cde, sowie alle Regelschaaren, welche durch drei beliebige Strahlen dieser zehn Schaaren gehen. Durch fortgesetzte Construction solcher Regelschaaren kann man zu allen Strahlen des Complexes gelangen. Wenn die fünf windschiefen Strahlen eine Gerade g schneiden, sonst aber von einander unabhängig sind, so erhält man auf diese Weise einen singulären linearen Complex, welcher aus allen, die Gerade g schneidenden Strahlen besteht; die Complexstrahlen sind aber in diesem Falle nicht Leitstrahlen eines Nullsystems.

Alle Geraden und Ebenen, deren Polaren und Pole unendlich fernliegen, heissen „Durchmesser" und „Durchmesserebenen" des Nullsystems. Sie gehen sämmtlich durch den Pol oder Nullpunkt der unendlich fernen Ebene, woraus folgt:

„Die Durchmesser des Nullsystems sind zu einander und „zu den Durchmesserebenen parallel."

Alle in einer Durchmesserebene liegenden Leitstrahlen des Nullsystems sind parallel, weil sie durch den unendlich fernen Nullpunkt der Ebene gehen. Der von ihnen gebildete Parallelstrahlenbüschel bleibt ungeändert, wenn man ihn in der Richtung der Durchmesser verschiebt. Wir schliessen daraus:

„Der lineare Strahlencomplex und das zugehörige Null„system ändern sich nicht, wenn man sie in der Richtung der „parallelen Durchmesser verschiebt."

Jede Ebene, welche zu zwei einander zugeordneten Geraden parallel läuft, ist eine Durchmesserebene des Nullsystems.

Die Nullpunkte paralleler Ebenen liegen in einem Durchmesser, dessen Polare in den parallelen Ebenen unendlich fern liegt. Derjenige Durchmesser n, welcher die Nullpunkte aller zu den Durchmessern normalen Ebenen enthält, möge die „Hauptaxe“ des Nullsystems und des zugehörigen linearen Complexes heissen. Diese Hauptaxe n ist zu allen sie schneidenden Leitstrahlen normal; sie liegt mit je zwei einander zugeordneten und zu ihr windschiefen Geraden g, g_1 auf einem gleichseitigen Paraboloid, und schneidet die Linie des kürzesten Abstandes von g und g_1 rechtwinklig. Nämlich alle zu n normalen Leitstrahlen, welche g schneiden, müssen nach früheren Sätzen auch g_1 schneiden, und bilden eine parabolische Regelschaar (vgl. I. Abth. Seite 102).

Weil mit der Hauptaxe n zugleich ihre unendlich ferne Polare n_1 gegeben ist, so folgt aus einem vorhin bewiesenen Satze:

„Das Nullsystem ist bestimmt durch seine Hauptaxe n und „einen beliebig angenommenen Leitstrahl l, welcher die Haupt- „axe weder schneidet noch rechtwinklig kreuzt.“

Alle Leitstrahlen, welche durch irgend einen Punkt P von l gehen, liegen mit l und dem von P auf n gefällten Perpendikel in einer Ebene π. Der Nullpunkt einer beliebig durch P gelegten Ebene ε ist der Schnittpunkt des Leitstrahles $\pi\varepsilon$ mit dem in ε auf n errichteten Perpendikel.

Einem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt C auf der Hauptaxe n liegt, ist im Nullsysteme ein zu ihm reciprokes ebenes System zugeordnet, dessen Ebene γ im Punkte C zu der Hauptaxe normal ist. Den Tangenten eines in γ liegenden Kreises mit dem Mittelpunkte C entsprechen demnach die Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung mit dem Centrum C. Weil nun in Bezug auf den Kreis der Punkt C der Pol ist von der unendlich fernen Geraden n_1 der Ebene γ, so ist bezüglich der Kegelfläche die Ebene γ die Polarebene der Hauptaxe n; und weil je zwei Leitstrahlen, die sich in C rechtwinklig schneiden, bezüglich des Kreises conjugirt sind, so müssen diese in γ liegenden Leitstrahlen, da sie im Nullsysteme sich selbst entsprechen, auch bezüglich der Kegelfläche conjugirt sein. Die Ebene γ ist folglich eine Symmetrieebene, und jeder in γ liegende Strahl des Punktes C ist eine Hauptaxe der Kegelfläche, und es ergiebt sich (vgl. I. Abth. Seite 153):

„Jedem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Hauptaxe n
„liegt und dessen Ebene zu n normal ist, ist eine Rotations-
„Kegelfläche zugeordnet, von welcher n die Rotationsaxe ist."

Lässt man also einen Punkt und seine Nullebene zusammen rotiren um die Hauptaxe, so beschreibt der Punkt einen Kreis, die Ebene aber umhüllt die dem Kreise zugeordnete Kegelfläche, indem sie nicht aufhört, die Nullebene des Punktes zu sein. Daraus folgt:

„Durch eine Drehung um die Hauptaxe ändern sich das
„Nullsystem und der lineare Strahlencomplex nicht."

Sie ändern sich auch nicht, wenn sie um die Hauptaxe gedreht und zugleich in der Richtung der Hauptaxe verschoben werden, also eine Schraubenbewegung um die Hauptaxe ausführen. —

„Bezeichnet r den Abstand eines beliebigen Punktes P von
„der Hauptaxe n, und ρ den Winkel, welchen die Nullebene
„dieses Punktes mit der Hauptaxe bildet, so ist $r \cdot \tan \rho$ eine
„constante Grösse, welche sich mit der Lage des Punktes nicht
„ändert."

Um diesen bemerkenswerthen Satz zu beweisen, nehmen wir in der Hauptaxe n und in einem Leitstrahle u, welcher in einem Punkte C die Hauptaxe rechtwinklig schneidet, zwei projectivisch gleiche Punktreihen an, die den Punkt C entsprechend gemein haben. Denselben sind zwei projectivische Ebenenbüschel n_1, u zugeordnet, welche die Nullebene γ des Punktes C entsprechend gemein haben, also perspectivisch liegen und einen Parallel-Strahlenbüschel erzeugen. Ein Strahl dieses Büschels liegt unendlich fern in der Ebene $\overline{nu}$, derjenige nämlich, in welchem die Nullebenen der unendlich fernen Punkte von u und n sich schneiden; die Ebene des Parallelstrahlenbüschels läuft folglich zu der Ebene $\overline{nu}$ parallel in irgend einem Abstande e.

Sind nun P und P' irgend zwei homologe Punkte von u und n, so haben dieselben gleichen Abstand r vom Punkte C, und ihre Nullebenen schneiden sich in einer zu u parallelen Geraden, die von der Ebene $\overline{nu}$ den Abstand e hat. Die Nullebene von P geht durch u und bildet mit der Hauptaxe n einen Wirkel ρ; die Nullebene von P' aber schneidet die Hauptaxe rechtwinklig in P'. Es ist deshalb $CP' \cdot \tan \rho = e$ oder $r \cdot \tan \rho = e$, wo auch der Punkt P auf u angenommen sein mag. Weil aber der Leitstrahl u durch Verschiebung in der Richtung von n und durch Drehung um n mit jedem anderen die Hauptaxe schneidenden Leitstrahle zur Deckung gebracht werden kann und dabei das Nullsystem

ungeändert bleibt, so hat für alle diese Leitstrahlen die Constante e denselben Werth, und das Product $r \,.\, \operatorname{tang} \rho$ ist überhaupt nicht abhängig von der Lage des Punktes P. — Die Nullpunkte aller Ebenen, welche mit der Hauptaxe n einen halben rechten Winkel bilden, haben von n den Abstand e, liegen also auf einem Rotationscylinder vom Radius e.

„Wenn r den Abstand eines beliebigen Leitstrahles l von „der Hauptaxe n bezeichnet und ρ den Winkel, welchen die „Richtungen von n und l bilden, so ist $r \,.\, \operatorname{tang} \rho$ gleich der „Constanten e.“

Nämlich die Linie des kürzesten Abstandes schneidet die beiden Geraden n und l rechtwinklig in zwei Punkten C und P, deren Abstand $PC = r$ ist; ρ aber ist der Winkel, welchen die durch l und C gehende Nullebene des Punktes P mit der Hauptaxe bildet. Damit ist der Satz auf den vorhergehenden zurückgeführt. Die Gleichung $r \,.\, \operatorname{tang} \rho = e$, welcher alle Strahlen des linearen Complexes genügen müssen, kann als Gleichung des Complexes bezüglich seiner Hauptaxe betrachtet werden.

Die Tangenten einer Schraubenlinie, welche die Hauptaxe zur Axe hat und irgend einen Leitstrahl berührt, sind lauter Leitstrahlen des Nullsystems. Jeder Punkt dieser Curve hat seine eigene Schmiegungsebene zur Nullebene; die Schmiegungsebenen aller Punkte, welche die Schraubenlinie mit einer beliebigen Ebene gemein hat, gehen folglich durch einen Punkt, nämlich durch den Nullpunkt der Ebene. Durch die Schraubenlinie ist das Nullsystem nebst dem zugehörigen Strahlencomplex bestimmt; jenachdem dieselbe rechts oder links gewunden ist, können wir auch den linearen Strahlencomplex als rechts oder links gewunden bezeichnen. Durch die Hauptaxe und die Constante e ist der lineare Strahlencomplex bestimmt, wenn noch angegeben wird, ob er rechts oder links gewunden sein soll.

„Sind g und g_1 zwei einander zugeordnete Gerade, a und a_1 „ihre Abstände von der Hauptaxe des Nullsystems, und α und α_1 „die Winkel, welche sie mit der Hauptaxe bilden, so ist „$a \,.\, \operatorname{tang} \alpha_1 = a_1 \,.\, \operatorname{tang} \alpha = e$ und folglich:

$$„a : a_1 = \operatorname{tang} \alpha : \operatorname{tang} \alpha_1.“$$

Nämlich die Nullebene desjenigen Punktes von g, welcher von der Hauptaxe den Abstand a hat, geht durch g_1 und bildet mit der Hauptaxe den Winkel α_1; woraus folgt $a \,.\, \operatorname{tang} \alpha_1 = e$.

Das Nullsystem und dessen wichtigste Eigenschaften wurden schon 1833 von Möbius*) entdeckt anlässlich der Aufgabe der Mechanik: „Zwei Einzelkräfte zu construiren, welche ein gegebenes räumliches Kräftesystem ersetzen." Diese Aufgabe lässt unendlich viele Lösungen zu. Nimmt man von der einen Kraft einen Punkt P an, durch welchen sie gehen soll, so liegt die andere in einer durch P gehenden Ebene π, welche dem Punkte P in einem durch das Kräftesystem bestimmten Nullsysteme zugeordnet ist. Die Leitstrahlen dieses Nullsystems unterscheiden sich dadurch von den übrigen Geraden des Raumes, dass in Bezug auf jede von ihnen das statische Moment des Kräftesystems Null ist. Wenige Jahre nach Möbius entdeckte auch Chasles**) das Nullsystem; er bewies u. A. den Satz: Wenn ein fester Körper sich unendlich wenig verschiebt, so sind die Ebenen, welche durch seine einzelnen Punkte normal zu den Verschiebungsrichtungen der Punkte gelegt werden, in einem durch die Verschiebung bestimmten Nullsysteme jenen Punkten zugeordnet; nur muss die Verschiebung eine schraubenartige, darf also keine Parallelverschiebung und keine blosse Drehung sein.

Eilfter Vortrag.

Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.

Ein Strahlensystem heisst „von der $n$ten Ordnung", wenn durch einen beliebigen Punkt im Allgemeinen und höchstens n Strahlen desselben gehen, und „von der $k$ten Classe", wenn in einer Ebene im Allgemeinen k von seinen Strahlen liegen. Die Mittelpunkte der Kegelflächen und die Ebenen der Strahlenbüschel, welche etwa in dem Strahlensystem vorkommen, heissen „singuläre" Punkte und Ebenen des Systems.

Die gemeinschaftlichen Leitstrahlen von zwei Nullsystemen bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe; denn

---

*) Möbius in Crelle's Journal für d. r. u. a. Mathematik, Bd. 10, Seite 317; vgl. auch Möbius, Statik, Leipzig 1837.

**) Chasles, Aperçu historique, Bruxelles 1837; 2. Aufl., Paris 1865, Seite 614.

durch einen beliebigen Punkt geht einer derselben, nämlich die Schnittlinie der beiden Nullebenen des Punktes, und ebenso liegt in einer beliebigen Ebene einer von ihnen. Wenn zwei Strahlen dieses Systems sich schneiden, so fallen die beiden Nullebenen ihres Schnittpunktes zusammen mit der sie verbindenden Ebene, und jeder Strahl dieser Ebene, welcher durch jenen Schnittpunkt geht, ist ein gemeinschaftlicher Leitstrahl der beiden Nullsysteme. Also:

„Zwei lineare Strahlencomplexe haben mit einander ein „Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe gemein. „Dasselbe enthält jeden Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher „durch zwei sich schneidende, und jede Regelschaar, welche „durch drei windschiefe Strahlen des Systems geht (Seite 71).“

Von einer Regelfläche zweiter Ordnung, welche durch eine in dem Strahlensystem enthaltene Regelschaar geht, wollen wir der Kürze wegen sagen, sie sei in dem Strahlensystem enthalten.

Alle Strahlen des Systems erster Ordnung und erster Classe, welche eine beliebige Gerade g schneiden, bilden im Allgemeinen eine Regelschaar; dieselbe ist durch drei jener Strahlen bestimmt. Sei nun l ein beliebiger Strahl des Systems, S ein auf l liegender Punkt und σ eine durch l gehende Ebene; dann können wir den Punkten, in welchen σ von den übrigen Strahlen des Systems geschnitten wird, die Ebenen zuweisen, durch welche dieselben Strahlen aus S projicirt werden. Den Punkten einer Geraden g von σ entsprechen aber dann die Ebenen eines Büschels erster Ordnung g_1 von S; denn die durch diese Punkte gehenden Strahlen des Systems bilden eine Regelschaar, welche auch den Strahl l enthält und deren übrige Strahlen folglich aus S durch einen gewöhnlichen Ebenenbüschel g_1 projicirt werden. Die Ebene σ, sowie jede andere beliebig durch l gelegte Ebene wird demnach durch das Strahlensystem reciprok auf den Bündel S bezogen, sodass sie mit S einen Strahlenbüschel entsprechend gemein hat, und es ergiebt sich:

„Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe wird „von je zwei durch einen Strahl l desselben gelegten Ebenen σ, σ_1 „in collinearen ebenen Systemen geschnitten, und aus je zwei „auf l angenommenen Punkten S, S_1 durch collineare Bündel „projicirt. Diese Bündel sind durch das Strahlensystem reciprok auf jene ebenen Systeme bezogen und haben mit ihnen „und mit einander den Strahl l entsprechend gemein.“

Die collinearen ebenen Systeme σ und σ_1 haben mit einer beliebigen, nicht durch l gehenden Regelschaar abc des Strahlensystems zwei homologe Kegelschnitte gemein, und da die Gerade l sich selbst entspricht, so sind ihre Pole hinsichtlich dieser Kegelschnitte homologe Punkte von σ und σ_1 (Seite 10) und liegen auf einem Strahle des Strahlensystems. Die Verbindungslinie dieser beiden Pole ist aber die Polare von l bezüglich der in dem Strahlensystem enthaltenen Regelfläche abc, sodass sich ergiebt:

„Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe ist „bezüglich jeder Regelfläche, welche durch eine seiner Regel„schaaren geht, sich selbst zugeordnet, d. h. seine Strahlen „sind paarweise reciproke Polaren in Bezug auf die Regelfläche.“

Für den besonderen, bei dem Beweise nicht berücksichtigten Fall, in welchem die beiden Pole zusammenfallen und demnach die Regelfläche abc von l berührt wird, ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes weiter unten sehr leicht.

Wir wollen nun annehmen, die beiden beliebig durch l gelegten Ebenen σ, σ_1 seien conjugirt bezüglich der Regelfläche abc und letztere werde von der Geraden l nicht berührt. Jede der beiden Ebenen schneidet dann die Polare von l in dem Pole der anderen Ebene bezüglich der Regelfläche. Einer Geraden g von σ, welche durch den Pol von σ_1 geht und irgend zwei Strahlen d, e der Regelschaar abc schneidet, entspricht in der zu σ collinearen Ebene σ_1 eine Gerade g_1, welche durch den Pol von σ geht und dieselben beiden Strahlen d und e schneidet. Weil aber auch die Polare von g bezüglich der Regelfläche abc durch den Pol von σ geht und die sich selbst zugeordneten Strahlen d und e schneidet, so fällt sie mit g_1 zusammen, und je zwei homologe Punkte von g und g_1 sind conjugirt in Bezug auf die Regelfläche. Denkt man sich die collinearen Ebenen σ und σ_1 durch die einander entsprechenden Geraden g und g_1 beschrieben, so ergiebt sich hieraus:

„Zwei Ebenen, welche durch einen Strahl l des Strahlen„systems gehen und bezüglich einer beliebigen, diesen Strahl „weder enthaltenden, noch berührenden Regelfläche abc des „Strahlensystems conjugirt sind, werden durch das System „collinear so auf einander bezogen, dass ihre homologen Punkte „(insbesondere auch die auf l liegenden) conjugirt sind be„züglich der Regelfläche.“

Ebenso wird aus je zwei dieser conjugirten Punkte ein jeder Strahl des Systems durch zwei hinsichtlich der Regelfläche conjugirte Ebenen projicirt.

Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe ist durch vier willkürlich angenommene Strahlen a, b, c, d im Allgemeinen völlig bestimmt. Da nämlich die vier Strahlen mit einem beliebigen fünften durch einen linearen Strahlencomplex verbunden werden können, so kann durch sie ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe gelegt werden. Dasselbe wird aber von zwei durch a gelegten Ebenen in collinearen Systemen geschnitten, und deren collineare Beziehung ist im Allgemeinen bestimmt durch die sich selbst entsprechende Gerade a und durch die drei Paar homologen Punkte, welche b, c und d mit den beiden Ebenen gemein haben. Verbindet man also jeden Punkt der einen Ebene mit dem ihm entsprechenden Punkte der anderen, so erhält man alle Strahlen des Systems. Zugleich ergiebt sich:

„Zwei collineare Systeme, die in verschiedenen Ebenen liegen „und deren Schnittlinie, nicht aber jeden Punkt derselben entsprechend gemein haben, erzeugen ein Strahlensystem erster „Ordnung und erster Classe; zu demselben gehört jede Gerade, „welche zwei homologe Punkte der Ebenen verbindet.“

Ebenso erzeugen zwei collineare Strahlenbündel, die einen Strahl und höchstens zwei Ebenen entsprechend gemein haben, ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. Das durch vier windschiefe Strahlen a, b, c, d bestimmte Strahlensystem enthält die Regelschaar abc, sowie jede andere Regelschaar, welche mit abc zwei Strahlen gemein hat und durch d geht; es kann mittelst solcher Regelschaaren construirt werden.

Projiciren wir ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe aus zwei Punkten S_1 und S_2, die auf einem Strahle des Systems liegen, so erhalten wir nach einem früheren Satze zwei collineare Bündel. In den Strahlen des Systems schneiden sich je zwei homologe Ebenen dieser Bündel, und letztere haben den Strahl $\overline{S_1 S_2}$, sowie zwei durch ihn gehende Ebenen γ, φ, die aber auch zusammenfallen oder imaginär sein können, entsprechend gemein. Die in γ und φ liegenden homologen Strahlenbüschel von S_1 und S_2 haben ebenfalls den Strahl $\overline{S_1 S_2}$ entsprechend gemein und erzeugen zwei gerade Punktreihen u, v, deren Träger wir die „Axen“ des Strahlensystems nennen. Da jede Ebene des Bündels S_1, welche durch einen Punkt von u oder v geht, mit der ihr ent-

sprechenden Ebene des Bündels S_2 diesen Punkt gemein hat, so ergiebt sich:

„Von den Axen u, v des Strahlensystems erster Ordnung und „erster Classe wird jeder Strahl des Systems geschnitten, und „jede Gerade, welche u und v schneidet, gehört zu dem Strahlen-„system. Die beiden Axen enthalten alle singulären Punkte, „und durch sie gehen alle singulären Ebenen des Systems. „Sie sind in jedem Nullsysteme, dessen Leitstrahlencomplex „durch das Strahlensystem geht, einander zugeordnet."

Dass die beiden Axen u, v, falls sie nicht zusammenfallen, keinen Punkt mit einander gemein haben können, folgt auch daraus, dass zwei Strahlen des Systems sich im Allgemeinen nicht schneiden.

Wenn zwei Strahlen des Systems sich schneiden, so liegen sie mit der einen Axe in einer Ebene, und gehen mit der andern durch einen Punkt. Die beiden Axen sind gemeinschaftliche Leitstrahlen von allen in dem Systeme liegenden Regelschaaren; sie sind imaginär oder reell, oder fallen zusammen, jenachdem die durch eine dieser Schaaren gehende Fläche II. Ordnung von den nicht auf ihr liegenden Systemstrahlen in je zwei imaginären oder reellen Punkten geschnitten, oder aber berührt wird. Sind die beiden Axen nicht reell, so sind sie conjugirt-imaginäre Gerade zweiter Art (I. Abth. Seite 143). Eine Regelfläche wird in den Punkten einer auf ihr liegenden Geraden berührt von den Strahlen eines Systems erster Ordnung und erster Classe, dessen Axen mit jener Geraden zusammenfallen; alle in diesem Strahlensystem enthaltenen Regelflächen berühren sich in den Punkten jener Geraden.

„Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P bezüglich aller „in einem Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe „enthaltenen Regelflächen II. Ordnung schneiden sich in einem „Punkte P_1 des durch P gehenden Systemstrahles. Ebenso liegen „die Pole einer Ebene π bezüglich aller jener Regelflächen in „einer Ebene π_1, welche mit π einen Strahl des Systems gemein „hat. Die Punkte und die Ebenen des Raumes sind also paar-„weise conjugirt bezüglich aller Regelflächen des Systems."

Hat nämlich das Strahlensystem zwei reelle Axen u, v, so ist P_1 derjenige Punkt, welcher durch u und v harmonisch von P getrennt ist; denn weil alle Regelflächen des Systems durch u und v gehen, so müssen durch P_1 die Polarebenen von P gehen. Wenn zweitens alle Regelflächen des Systems sich in den Punkten

einer Geraden u berühren, so ist P_1 der Punkt, in welchem sie alle von der Ebene $\overline{Pu}$ berührt werden. Sind drittens die beiden Axen des Systems imaginär oder überhaupt nicht identisch, und ist l der durch P gehende Strahl des Systems, so kann man durch l mindestens ein Paar reeller Ebenen legen, welche in Bezug auf zwei beliebige Regelflächen R^2 und R_1^2 des Systems conjugirt sind (I. Abtheil. Seite 146); diese Ebenen aber werden durch das Strahlensystem collinear so auf einander bezogen, dass ihre homologen Punkte, insbesondere auch die auf l liegenden, conjugirt sind bezüglich beider Regelflächen (Seite 79), und es ist somit der Punkt P_1 von l, welcher in Bezug auf R^2 dem Punkte P conjugirt ist, auch bezüglich jeder anderen Regelfläche R_1^2 des Systems dem Punkte R conjugirt. —

Wir nehmen wieder auf einem Strahle l eines Systems erster Ordnung und erster Classe zwei Punkte S_1 und S_2 an und projiciren aus diesen das System durch zwei collineare Bündel. Beziehen wir sodann durch das Strahlensystem irgend zwei Ebenen α_1, β_1 von S_1 collinear auf die ihnen entsprechenden Ebenen α_2, β_2 von S_2, so entspricht jedem Schnittpunkte von α_1 und β_1 ein gemeinschaftlicher Punkt von α_2 und β_2; denn die Ebenenbüschel $\overline{\alpha_1\beta_1}$ und $\overline{\alpha_2\beta_2}$ erzeugen eine Regelschaar des Strahlensystems, von welcher die Geraden $\alpha_1\beta_1$ und $\overline{\alpha_2\beta_2}$ zwei Leitstrahlen sind. Wir können deshalb die collinearen Ebenen als homologe Gebilde von zwei collinearen Räumen betrachten, von welchen der eine die Ebenen α_1, β_1, der andere aber α_2 und β_2 enthält. Diese collinearen Räume aber haben alle Strahlen des Strahlensystems entsprechend gemein, weil jeder dieser Strahlen zwei Punkte von α_1 und β_1, zugleich aber die entsprechenden beiden Punkte von α_2 und β_2 verbindet. Alle Verbindungslinien homologer Punkte und alle Schnittlinien homologer Ebenen der collinearen Räume gehören folglich zu dem Strahlensystem, und letzteres wird sowohl durch je zwei homologe Bündel als auch durch je zwei (nicht zusammenfallende) homologe ebene Systeme der collinearen Räume erzeugt. Diese Räume haben die beiden Axen des Strahlensystems sowie jeden Punkt und jede Ebene dieser Axen entsprechend gemein.

Fallen die beiden Axen nicht zusammen, so können wir die Punkte S_1 und S_2 so auf dem Strahle l annehmen, dass sie bezüglich aller in dem Strahlensystem enthaltenen Regelflächen conjugirt sind. Dann sind aber auch je zwei homologe Ebenen der

Bündel S_1 und S_2, wie z. B. die Ebenen α_1 und α_2, sowie je zwei homologe Punkte dieser Ebenen und folglich je zwei homologe Punkte oder Ebenen der collinearen Räume conjugirt bezüglich aller jener Regelflächen. Also:

„Wenn man je zwei Punkte und je zwei Ebenen einander zuweist, „die bezüglich aller in dem Strahlensystem enthaltenen Regel-„flächen conjugirt sind, so erhält man lauter Paare homologer „Elemente von zwei (involutorisch liegenden) collinearen Räumen, „welche jeden Strahl des Systems und alle Punkte und Ebenen „seiner Axen entsprechend gemein haben."

Alle Strahlen eines Systems erster Ordnung und erster Classe, welche eine beliebige Curve II. Ordnung φ schneiden, liegen im Allgemeinen auf einer geradlinigen Fläche F^4 vierter Ordnung. Nämlich diese Fläche hat mit einer beliebigen Geraden höchstens vier Punkte gemein, weil alle die Gerade schneidenden Strahlen des Systems auf einer Regelfläche II. Ordnung liegen, die mit φ höchstens vier Punkte gemein hat. Die Fläche F^4 geht durch denjenigen Strahl s des Systems, welcher mit φ in einer Ebene liegt, im Allgemeinen zweimal. Jede durch s gelegte Ebene hat mit F^4 ausser s einen zu φ projectivischen Kegelschnitt gemein, und aus jedem Punkte von s werden die Strahlen der Fläche F^4 durch einen zu φ projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Da zwei windschiefe Gerade u, v allemal als Axen eines Strahlensystems aufgefasst werden können, so können wir auch sagen: Wenn eine Gerade g an zwei windschiefen Geraden u, v und einem beliebigen Kegelschnitt φ hingleitet, so beschreibt sie im Allgemeinen eine Fläche F^4 vierter Ordnung. Die Geraden u und v sind Doppelpunktsgerade dieser Fläche; denn durch einen beliebigen Punkt von u oder v gehen im Allgemeinen zwei Erzeugende g von F^4, und zwar liegen dieselben mit v resp. u in einer Ebene.

Wenn der Kegelschnitt φ mit der einen Geraden u einen Punkt U gemein hat, so zerfällt F^4 in die Ebene $\overline{Uv}$ und eine geradlinige Fläche F^3 dritter Ordnung. Die Gerade u ist eine Doppelpunkts-Gerade der Fläche F^3; letztere geht durch v und hat mit einer durch v gehenden Ebene im Allgemeinen zwei Erzeugende gemein, deren Schnittpunkt auf u liegt. Die Punktreihe v ist durch den Ebenenbüschel u projectivisch auf den Kegelschnitt φ bezogen, sodass sie mit φ die Fläche F^3 erzeugt.

Ein linearer Strahlencomplex enthält jedes durch vier seiner Strahlen bestimmte Strahlensystem erster Ordnung und erster

6*

Classe; umgekehrt kann ein solches Strahlensystem mit jedem nicht in ihm enthaltenen Strahle durch einen linearen Complex verbunden werden, weil letzterer durch fünf beliebige Strahlen bestimmt ist. Die Hauptaxen aller durch ein gegebenes Strahlensystem gehenden linearen Strahlencomplexe können wir „Hauptaxen des Systems" nennen. Jede dieser Hauptaxen ist zu allen sie schneidenden Strahlen des Systems normal, und letztere bilden folglich die eine Regelschaar eines gleichseitigen Paraboloides. Im Allgemeinen enthält das Strahlensystem nur eine unendlich ferne Gerade; dieselbe liegt auf dem gleichseitigen Paraboloid und die Hauptaxen des Strahlensystems sind zu den diese Gerade enthaltenden Ebenen parallel und werden von demjenigen Strahle des Systems, welcher zu diesen Ebenen normal ist, rechtwinklig geschnitten. Wenn jedoch das Strahlensystem eine unendlich ferne Axe u hat, so ist jede Gerade, welche zu den durch u gehenden Ebenen normal ist, eine Hauptaxe des Systems. Sind r und r_1 die Abstände einer Hauptaxe von zwei beliebigen Strahlen des Systems, und resp. ρ und ρ_1 die Winkel, welche sie mit diesen Strahlen bildet, so ist $r \,.\, \tang \rho = r_1 \,.\, \tang \rho_1$ (Seite 75).

Zwölfter Vortrag.

Erzeugnisse von zwei collinearen Strahlenbündeln oder ebenen Systemen. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Durch reciproke Grundgebilde zweiter und dritter Stufe sind wir zu den Flächen und Ebenenbündeln zweiter Ordnung und deren wichtigsten Eigenschaften geführt worden. Betrachten wir jetzt die Erzeugnisse collinearer Grundgebilde, und zwar zunächst dasjenige von zwei collinearen Strahlenbündeln. Das Gesetz der Reciprocität gestattet uns, die gewonnenen Resultate hernach auf das Erzeugniss von zwei collinearen ebenen Systemen zu übertragen.

Wenn zwei collineare Bündel S und S_1 weder concentrisch noch perspectivisch liegen, so erzeugen sie ein Strahlensystem erster Ordnung, in dessen Strahlen sich je zwei homologe Ebenen der Bündel schneiden. Nämlich durch einen beliebigen Punkt A des Raumes geht im Allgemeinen nur ein Strahl dieses Systems, weil

der Ebenenbüschel $\overline{SA}$ des Bündels S mit dem entsprechenden Ebenenbüschel von S_1 im Allgemeinen eine zu dem Strahlensystem gehörige Regelschaar erzeugt, von welcher nur ein Strahl durch A geht. Mehr als ein Strahl, nämlich unendlich viele Strahlen des Systems gehen nur dann durch A, wenn die Axen jener beiden Ebenenbüschel sich in A schneiden, wenn also A der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel ist; in diesem Falle ist A ein „singulärer Punkt“ des Strahlensystems, und die durch ihn gehenden Strahlen des Systems bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel oder eine Kegelfläche II. Ordnung, jenachdem die projectivischen Ebenenbüschel $\overline{SA}$ und $\overline{S_1 A_1}$, durch welche sie erzeugt werden, eine oder keine Ebene entsprechend gemein haben. Jede Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung, welche durch zwei homologe Ebenenbüschel von S und S_1 erzeugt wird, geht durch die sämmtlichen Schnittpunkte homologer Strahlen der Bündel; denn ein beliebiger von diesen singulären Punkten des Strahlensystems liegt allemal in zwei einander entsprechenden Ebenen jener Büschel.

Wenn die collinearen Strahlenbündel S und S_1 den Strahl $\overline{SS_1}$ entsprechend gemein haben, so erzeugen sie, wie wir bereits wissen, ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe; wir können diesen Fall als durch den letzten Vortrag erledigt betrachten. Wenn zweitens die collinearen Bündel nicht den Strahl $\overline{SS_1}$, wohl aber eine Ebene γ_1 entsprechend gemein haben, so erzeugen ihre in γ_1 liegenden homologen Strahlenbüschel eine durch S und S_1 gehende Curve II. Ordnung k^2, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen sich schneiden. Durch jeden Punkt von k^2 gehen unendlich viele Strahlen des von S und S_1 erzeugten Strahlensystems; dieselben bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel, liegen also in einer singulären Ebene des Systems. Zwei solche singuläre Ebenen aber schneiden sich in einer Geraden v, deren Punkte ebenfalls Schnittpunkte homologer Strahlen von S und S_1 sein müssen, weil mehr als ein Strahl des Systems durch jeden von ihnen geht; der Punkt, in welchem v die Ebene von k^2 schneidet, muss deshalb auf der Curve k^2 liegen. Die Schnittlinien homologer Ebenen von S und S_1 haben folglich sowohl mit v als auch mit k^2 einen Punkt gemein, und jede Gerade, welche von v und k^2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten wird, gehört zu dem von S und S_1 erzeugten Strahlensysteme. Da nun eine Ebene im Allgemeinen zwei solche Gerade enthält, so ergiebt sich:

„Zwei nicht concentrische, collineare Strahlenbündel S, S_1, „die eine Ebene, nicht aber einen Strahl entsprechend gemein „haben, erzeugen ein Strahlensystem erster Ordnung und zweiter „Classe. Die singulären Punkte dieses Systems liegen auf einem „Kegelschnitt k^2 und einer Geraden v, welche sich schneiden und „von denen k^2 durch die Mittelpunkte der beiden Bündel „geht. Das Strahlensystem besteht aus allen Geraden, welche „die Punkte von v mit denjenigen von k^2 verbinden."

Projiciren wir aus zwei beliebigen Punkten P und P_1 von k^2 diese Curve und die Punktreihe v durch zwei Paar Strahlenbüschel, so sind letztere durch k^2 und v projectivisch auf einander bezogen; und zwar entsprechen die gemeinschaftlichen Strahlen der beiden Büschelpaare P und P_1 einander, weil sie den Schnittpunkt von k^2 und v projiciren. Durch jene projectivischen Strahlenbüschel wird somit eine collineare Verwandtschaft zwischen den Strahlenbündeln P und P_1 hergestellt (Seite 6), und zwar so, dass je zwei homologe Ebenen dieser Bündel sich in einer Geraden schneiden, welche mit k^2 und v je einen Punkt gemein hat. Also:

„Das Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Classe „wird aus je zwei Punkten seiner Leitcurve k^2 II. Ordnung „durch zwei collineare Strahlenbündel projicirt."

Eine Ausnahme macht nur der Schnittpunkt von k^2 und v, aus welchem das Strahlensystem durch den Büschel singulärer Ebenen v projicirt wird.

Dem Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Classe ist reciprok das Strahlensystem erster Classe und zweiter Ordnung. Dasselbe wird erzeugt durch zwei collineare ebene Systeme, welche einen Punkt, aber keine Gerade entsprechend gemein haben. Seine singulären Ebenen bilden einen Ebenenbüschel zweiter und einen Büschel erster Ordnung, und es besteht aus allen Geraden, in welchen die Ebenen dieser beiden Büschel sich paarweise schneiden. Alle Tangenten einer Kegelfläche II. Ordnung, welche eine gegebene Tangente der Kegelfläche schneiden, bilden ein Strahlensystem erster Classe und zweiter Ordnung.

Wir wollen nunmehr annehmen, dass die collinearen Bündel S, S_1 gar kein Element entsprechend gemein haben. In diesem Falle erzeugen die Bündel ein Strahlensystem erster Ordnung und dritter Classe, dessen singuläre Punkte in einer „Raumcurve dritter Ordnung" liegen. Nämlich alle durch einen singulären Punkt

gehenden Strahlen des Systems bilden eine irreducible Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch alle anderen singulären Punkte geht; jeder Schnittpunkt von zwei Strahlen des Systems ist ein singulärer Punkt und jede Verbindungslinie von zwei singulären Punkten ist ein Strahl des Systems. Wenn nun in irgend einer Ebene mehr als drei Strahlen des Systems lägen, so würden deren Schnittpunkte sämmtlich singuläre Punkte sein und durch einen oder jeden derselben ginge ein Strahlenkegel des Systems, der mehr als zwei Strahlen mit der Ebene gemein hätte; was unmöglich ist. Das Strahlensystem ist deshalb von der dritten Classe und von seinen singulären Punkten liegen höchstens drei in einer Ebene und höchstens zwei in einer Geraden.

Zwei homologe Ebenenbüschel von S und S_1 erzeugen eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung, nämlich eine dem Strahlensystem angehörige Kegelfläche oder Regelschaar, jenachdem ihre Axen sich (in einem singulären Punkte) schneiden oder nicht. Zwei beliebige so erzeugte Flächen zweiter Ordnung haben denjenigen von SS_1 verschiedenen Strahl des Systems mit einander gemein, welcher die zwei Paar Axen der sie erzeugenden Ebenenbüschel schneidet; sie durchdringen sich ausserdem in einer durch die Punkte S und S_1 gehenden Raumcurve dritter Ordnung, in deren Punkten sich je zwei Strahlen des Systems schneiden, und welche der Ort aller singulären Punkte des Systems ist. Also:

„Zwei nicht concentrische, collineare Strahlenbündel S, S_1, „welche kein Element entsprechend gemein haben, erzeugen ein „Strahlensystem erster Ordnung und dritter Classe. Dasselbe „enthält alle Sehnen einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung, „welche der Ort seiner singulären Punkte ist und aus jedem „dieser Punkte durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projicirt „wird (Fig. 15). Diese cubische Raumcurve k^3 geht durch die „Mittelpunkte der beiden Bündel, und in jedem ihrer Punkte „schneiden sich zwei homologe Strahlen von S und S_1."

Wenn die Raumcurve k^3 nebst den auf ihr liegenden Punkten S und S_1 gegeben ist, so kennen wir auch die homologen Kegelflächen zweiter Ordnung, durch welche k^3 aus S und S_1 projicirt wird. Diese Kegelflächen sind durch die Raumcurve projectivisch auf einander bezogen und liegen perspectivisch zu dem Ebenenbüschel $\overline{SS_1}$; da sie kein Element entsprechend gemein haben, so berühren sie sich nicht, sondern schneiden sich in dem Strahle $\overline{SS_1}$. Eine beliebige Ebene begegnet den beiden Kegelflächen in Curven

II. Ordnung, welche sich in einem auf $\overline{SS_1}$ liegenden Punkte schneiden und folglich noch mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte mit einander gemein haben. Also:

„Die cubische Raumcurve k^3 hat mit einer beliebigen Ebene „mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein."

Durch die projectivischen Kegelflächen $S(k^3)$ und $S_1(k^3)$ ist die collineare Verwandtschaft der Bündel S und S_1 völlig bestimmt (Seite 10), sodass durch die Raumcurve k^3 auch das von S und S_1 erzeugte Strahlensystem gegeben ist. Jede Sehne oder Tangente von k^3 wird aus S und S_1 durch zwei homologe Schnitt- oder Berührungsebenen jener Kegelflächen projicirt und gehört zu dem Strahlensystem. Wir können aber auch jeden Strahl des Systems, welcher aus S und S_1 durch zwei ausserhalb jener Kegelflächen liegende Ebenen projicirt werden, als eine (uneigentliche) Sehne der Raumcurve k^3 auffassen; denn er schneidet die beiden in jenen Ebenen enthaltenen homologen Strahlenbüschel von S und S_1 in zwei projectivischen Punktreihen, deren entsprechend gemeinschaftliche Punkte auf k^3 liegen, aber freilich conjugirt imaginär sind. Wir dürfen deshalb sagen:

„Das Strahlensystem erster Ordnung und dritter Classe besteht aus den Sehnen derjenigen Raumcurve k^3 dritter Ordnung, „welche die singulären Punkte des Systems erhält. Ein Strahl „des Systems ist eine eigentliche oder uneigentliche Sehne von „k^3, jenachdem er zwei reelle oder zwei conjugirt-imaginäre „Punkte der Curve verbindet. Auch die Tangenten der Curve k^3 „gehören zu dem Strahlensystem; sie trennen in demselben die „eigentlichen Sehnen von den uneigentlichen und haben je „zwei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein. Wir „wollen k^3 die Ordnungscurve des Strahlensystems nennen."

Die Raumcurve k^3 kann mit zwei beliebigen Sehnen a, b durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine Schaar von Sehnen enthält; denn die Ebenenpaare, durch welche die beiden Sehnen aus S und S_1 projicirt werden, schneiden sich in den Axen von zwei homologen Ebenenbüscheln der collinearen Bündel, und diese Büschel erzeugen jene Fläche. Da die Fläche zweiter Ordnung auch von einer Geraden beschrieben wird, welche an k^3 hingleitet und dabei die Sehnen a und b beständig schneidet, so ergiebt sich der Satz:

„Die Raumcurve dritter Ordnung wird aus je zwei ihrer „Sehnen durch zwei projectivische Ebenenbüschel projicirt";

denn die Ebenen, welche die Sehnen a, b mit jener beweglichen Geraden und folglich mit einem beweglichen Punkt von k^3 verbinden, beschreiben um a und b zwei projectivische Ebenenbüschel. Der Satz gilt auch dann, wenn a und b sich auf der Curve schneiden, also mit ihr auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung liegen. Wir wollen ihn zunächst zu einer linearen Construction von Schmiegungsebenen der Curve k^3 benutzen.

Sei a die Tangente von k^3 in einem Punkte A und b irgend eine andere Sehne. Wenn dann ein Punkt P die Raumcurve k^3 beschreibt, so beschreiben die Ebenen $\overline{aP}$ und $\overline{bP}$ zwei projectivische Ebenenbüschel um a und b. Nun geht aber $\overline{aP}$ über in die Schmiegungsebene von A, wenn P sich diesem Punkte A unbegrenzt nähert; zugleich geht $\overline{bP}$ über in die Ebene $\overline{bA}$. Sobald also die projectivische Beziehung der Ebenenbüschel a und b durch drei Paare homologer Ebenen festgestellt ist, finden wir die Schmiegungsebene des Punktes A, indem wir zu der Ebene $\overline{bA}$ die entsprechende im Büschel a construiren. — Wenn die Sehne b durch den Punkt A geht, so nähert sich, indem der bewegliche Punkt P an den Punkt A hinanrückt, die Gerade $\overline{AP}$ unbegrenzt der Tangente a und die Ebene $\overline{bP}$ der Ebene $\overline{ba}$; zugleich aber geht $\overline{aP}$ über in die Ebene, welche im Strahle a die durch die Büschel a und b erzeugte Kegelfläche zweiter Ordnung berührt. Also:

„Die Schmiegungsebene eines beliebigen Curvenpunktes A „geht durch die Tangente a dieses Punktes und berührt in a „die Kegelfläche zweiter Ordnung, durch welche die Raum„curve k^3 aus A projicirt wird.“

Um ohne Hülfe der collinearen Strahlenbündel durch einen beliebigen Punkt Q eine Sehne der Raumcurve zu legen, verbinden wir Q mit irgend einem Punkte P von k^3 durch eine Gerade g und legen durch g zwei Ebenen, welche die Curve in je zwei von P verschiedenen Punkten schneiden. Die Verbindungslinien a, b dieser Punktenpaare liegen mit der Raumcurve auf einer Regelfläche zweiter Ordnung, welcher auch die Gerade g angehört; denn g hat die drei Punkte ga, gb und P mit der Fläche gemein. Von derjenigen Regelschaar dieser leicht zu construirenden Fläche, zu welcher a und b gehören, geht ein Strahl durch den Punkt Q, dieser Strahl aber ist die gesuchte Sehne. Diese lineare Construction führt stets zum Ziel, auch wenn die durch Q gehende Sehne eine uneigentliche ist. Beiläufig ergiebt sich:

„Durch eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Gerade g, „welche die Curve in einem Punkte schneidet, aber keine „Sehne derselben ist, kann eine einzige Regelfläche zweiter „Ordnung gelegt werden. Die eine Regelschaar dieser Fläche „besteht aus Sehnen der Curve, die Strahlen der anderen Regel-„schaar, welcher g angehört, schneiden die Raumcurve in je „einem Punkte."

Zur Begründung dieser letzten Bemerkung sei hervorgehoben, dass jeder Strahl g' der zweiten Schaar mit jeder eigentlichen Sehne der ersten Regelschaar durch eine Ebene verbunden werden kann, welche mit der Raumcurve drei Punkte gemein hat; zwei dieser Punkte liegen auf der Sehne, und folglich liegt der dritte auf g'.

Projiciren wir aus einem beliebigen Punkte S_2 der Raumcurve k^3 das Sehnensystem derselben, so ist je zwei homologen Ebenen α und α_1 der collinearen Bündel S, S_1 eine durch ihre Schnittlinie $\overline{\alpha\alpha_1}$ gehende Ebene α_2 von S_2 zugewiesen. Und da diejenigen Sehnen von k^3, welche zwei homologe Ebenenbüschel von S und S_1 erzeugen, auf einer durch S_2 gehenden Kegelfläche zweiter Ordnung oder Regelschaar liegen, so werden sie aus S_2 durch einen dritten Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe gleichfalls auf der Kegelfläche liegt, resp. ein Leitstrahl der Regelschaar ist. Es entspricht also nicht nur jeder Ebene von S eine Ebene von S_2, sondern auch jedem Ebenenbüschel I. Ordnung von S ein solcher von S_2; d. h. die Bündel S und S_2 sind ebenso wie S und S_1 collinear auf einander bezogen, sodass sie mit einander das Sehnensystem der Raumcurve k^3 erzeugen. Die Mittelpunkte S, S_1 der ursprünglich angenommenen collinearen Bündel können folglich mit beliebigen anderen Punkten S_2, S_3 der Raumcurve vertauscht werden, sie zeichnen sich nicht aus vor den übrigen Punkten von k^3, und was von ihnen bewiesen wird, gilt auch von den anderen Curvenpunkten. Insbesondere gilt der wichtige Satz:

„Aus je zwei auf ihr liegenden Punkten wird die Raum-„curve dritter Ordnung durch zwei projectivische Kegelflächen „zweiter Ordnung und ihr Sehnensystem durch zwei collineare „Strahlenbündel projicirt; nämlich jede Sehne wird durch zwei „homologe Ebenen, und jeder Punkt der Curve durch zwei „homologe Strahlen der Bündel projicirt."

Jede durch S gelegte Ebene enthält mindestens eine Sehne der Raumcurve, nämlich ihre Schnittlinie mit der entsprechenden

Ebene des Bündels S_1. Hat die Ebene drei Punkte mit der Curve gemein, so gehören die drei Verbindungslinien dieser Punkte zu dem Sehnensystem; enthält die Ebene ausser S nur noch einen Punkt P der Curve, so berührt sie dieselbe in S oder P, und enthält nur zwei Strahlen des Sehnensystems, nämlich $\overline{SP}$ und die Tangente des Berührungspunktes. Weil nun S ein beliebiger Punkt der Raumcurve ist, und letztere mit jeder Ebene mindestens einen Punkt gemein hat, weil ferner jeder Schnittpunkt von zwei Sehnen auf der Ordnungscurve liegt, so ergiebt sich:

„Jede Ebene enthält genau so viele reelle Sehnen wie reelle „Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung, also mindestens „eine Sehne und höchstens drei."

Eine Raumcurve dritter Ordnung kann auch durch Regelflächen erzeugt werden, wie der folgende Satz lehrt:

„Zwei Regelflächen R und R_1 oder eine Regelfläche R und „eine Kegelfläche K zweiter Ordnung, welche sich in einem „Strahle a schneiden, haben im Allgemeinen noch eine Raum-„curve k^3 dritter Ordnung mit einander gemein, von welcher „a eine Sehne ist."

Jede beliebig durch a gelegte Ebene schneidet die Flächen in je einem von a verschiedenen Strahle. Weisen wir je zwei solche Strahlen einander als entsprechende zu, so sind die beiden Regelschaaren R und R_1, denen der Strahl a nicht angehört, oder auch die Regelschaar R und die Kegelfläche K projectivisch auf einander bezogen, weil beide auf den Ebenenbüschel a perspectivisch bezogen sind. Je zwei einander zugewiesene Strahlen der Flächen schneiden sich nun in einem Punkte der Curve k^3 und alle diese Schnittpunkte werden aus einem beliebigen P unter ihnen durch die Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung projicirt. Nämlich die beiden projectivischen Strahlengebilde R und R_1 oder R und K werden aus dem Punkte P durch zwei projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung projicirt, welche die erwähnte Kegelfläche II. Ordnung erzeugen. Die Curve k^3 ist also eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn nicht eine oder auch jede solche durch sie gelegte Kegelfläche II. Ordnung in Strahlenbüschel I. Ordnung zerfällt, was möglich ist. In diesem besonderen Falle kann die Raumcurve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder auch in drei Gerade zerfallen, oder sich auf eine oder zwei Gerade reduciren. — Weil jeder beliebige Strahl g der Regelschaar R nur einen Punkt mit der Raumcurve k^3 gemein hat, ohne k^3 zu

berühren, und weil durch g und k^3 nur eine einzige Regelfläche hindurchgelegt werden kann, deren zweite Regelschaar aus Sehnen der Curve bestehen muss, so ist auch a eine solche Sehne.

> „Drei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen a, a_1, a_2 „nicht durch einen und denselben Punkt gehen, erzeugen im „Allgemeinen eine Raumcurve k^3 dritter Ordnung, von welcher „a, a_1, a_2 Sehnen sind. In jedem Punkte von k^3 schneiden „sich drei homologe Ebenen der Büschel."

Nämlich der Büschel a erzeugt mit jedem der beiden anderen Büschel eine Kegel- oder auch eine Regelfläche, und die beiden so entstehenden Flächen haben die Gerade a entsprechend gemein. Der Satz ist hiedurch auf den vorhergehenden zurückgeführt. Er kann als Umkehrung eines früher (Seite 88) bewiesenen Satzes betrachtet werden. Durch ihn lösen wir die Aufgabe:

> „Eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von „welcher drei Punkte P, Q, R und drei Sehnen a, a_1, a_2 ge- „geben sind, die weder durch jene Punkte hindurchgehen, noch „deren Verbindungslinien schneiden."

Wir beziehen nämlich die Ebenenbüschel a, a_1, a_2 projectivisch so auf einander, dass in jedem der Punkte P, Q, R drei homologe Ebenen der Büschel sich schneiden. Durch die Ebenenbüschel wird alsdann die gesuchte Curve erzeugt. Bilden die Sehnen a, a_1, a_2 ein Dreieck, so geht die Raumcurve auch durch die Eckpunkte desselben, also im Ganzen durch sechs willkürlich gegebene Punkte.

> „Wenn eine Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung und „ein Ebenenbüschel I. Ordnung projectivisch auf einander be- „zogen sind, so erzeugen sie im Allgemeinen eine Raumcurve „dritter Ordnung, von welcher die Axe a des Ebenenbüschels „eine Sehne ist."

Seien a_1 und a_2 zwei beliebige, zu dem Strahlengebilde perspectivische Ebenenbüschel, so sind dieselben projectivisch zu dem Ebenenbüschel a und erzeugen mit demselben die Raumcurve. Auch hier übergehe ich die Ausnahmefälle.

Auf einer Regelfläche II. Ordnung R^2 können im Allgemeinen zwei Raumcurven dritter Ordnung construirt werden, welche durch drei auf R^2 angenommene Punkte A, B, C gehen und eine nicht auf R^2 liegende Gerade a zur Sehne haben. Bezieht man nämlich die beiden Regelschaaren der Fläche R^2 projectivisch auf den Ebenenbüschel a, so dass ihre durch A, B und C gehenden Strahlen

den resp. Ebenen $\overline{aA}$, $\overline{aB}$ und $\overline{aC}$ entsprechen, so erzeugen sie mit dem Ebenenbüschel die beiden Raumcurven. Letztere gehen durch jeden Punkt, welchen die Gerade a mit R^2 gemein hat, und es ergiebt sich:

„Auf einer Regelfläche II. Ordnung R^2 können höchstens „zwei Raumcurven dritter Ordnung construirt werden, welche „durch fünf auf R^2 gegebene Punkte gehen.“

Jede Regelschaar von R^2 besteht aus Sehnen von einer dieser Raumcurven und liegt zu der anderen perspectivisch. Deshalb folgt aus dem letzten Satze:

„Zwei von einander verschiedene Raumcurven dritter Ord- „nung, deren gemeinschaftliche Sehnen eine Regelschaar bilden, „haben höchstens vier Punkte mit einander gemein.“

Vier projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung, die beliebig im Raume liegen, erzeugen zu dreien vier Raumcurven dritter Ordnung; je zwei der letzteren liegen auf einer Regelfläche, welche durch zwei der projectivischen Ebenenbüschel erzeugt wird, und haben eine Schaar gemeinschaftlicher Sehnen, also höchstens vier gemeinschaftliche Punkte. Daraus ergiebt sich:

„Es giebt im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in welchen „je vier homologe Ebenen von vier beliebigen projectivischen „Ebenenbüscheln sich schneiden.“

Noch möge der folgende Satz hier Platz finden:

„Durch sechs Punkte S, S_1, A, B, C, D, von denen keine „vier in einer Ebene liegen, kann nur eine Raumcurve dritter „Ordnung gelegt werden.“

Denn die beiden Kegelflächen II. Ordnung, durch welche die Curve aus den Punkten S und S_1 projicirt wird, sind durch die Strahlen, welche jeden dieser Punkte mit den fünf übrigen verbinden, völlig bestimmt. Die Curve wird wohl am leichtesten construirt, indem man drei der sechs Punkte durch Sehnen verbindet und wie bei der letzten Aufgabe verfährt. Zwei Raumcurven dritter Ordnung können also höchstens fünf Punkte mit einander gemein haben, ohne zusammen zu fallen. — Ganz analog ist der Satz zu beweisen:

„Eine Raumcurve dritter Ordnung ist völlig bestimmt durch „fünf ihrer Punkte und die Tangente in einem derselben, oder „durch vier Punkte und die Tangenten in zwei derselben, oder „durch drei Punkte und deren Tangenten.“

Denn sind z. B. A, B, C drei Punkte der Curve, und a, b, c die resp. Tangenten in diesen Punkten, so muss die Kegelfläche II. Ordnung, durch welche die Curve aus dem Punkte A projicirt wird, durch die drei Strahlen a, $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gehen und in den letzteren beiden die resp. Ebenen $\overline{Ab}$ und $\overline{Ac}$ berühren. Dieselbe ist also völlig bestimmt, und ebenso die Kegelfläche II. Ordnung, durch welche die Curve aus B oder C projicirt wird.

„Eine Raumcurve dritter Ordnung ist im Allgemeinen völlig „bestimmt, wenn von ihr gegeben sind zwei Punkte und vier „Sehnen, oder drei Punkte und drei Sehnen, oder fünf Punkte „und eine Sehne."

Denn im ersten dieser Fälle ist die collineare Verwandtschaft der beiden Strahlenbündel, durch welche das Sehnensystem der Raumcurve aus den beiden gegebenen Curvenpunkten projicirt wird, im Allgemeinen völlig bestimmt durch die vier Paare homologer Ebenen, die sich in den vier gegebenen Sehnen schneiden. Wenn drei von den vier Sehnen ein Dreieck bilden, so geht die Raumcurve durch die Eckpunkte desselben; damit aber ist der dritte Fall des Satzes erledigt. Der zweite Fall wurde schon vorhin besprochen.

Uebertragen wir jetzt die bisherigen Sätze auf das Strahlengebilde, welches zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1 erzeugen, so ergiebt sich Folgendes:

„Zwei collineare ebene Systeme Σ und Σ_1, welche nicht in „derselben Ebene liegen und kein Element entsprechend gemein „haben, erzeugen ein Strahlensystem erster Classe und dritter „Ordnung, ausserdem aber einen Ebenenbüschel dritter Ordnung. „Jeder Strahl des Systems verbindet zwei homologe Punkte, „jede Ebene des Büschels dritter Ordnung verbindet zwei „homologe Gerade von Σ und Σ_1 mit einander. Wir wollen „jeden Strahl des Systems eine Axe des Ebenenbüschels dritter „Ordnung, letzteren aber den Ordnungsbüschel des Systems „von Strahlen nennen. In einer beliebigen Ebene liegt im „Allgemeinen nur eine Axe des Büschels dritter Ordnung; nur „wenn die Ebene dem Büschel selbst angehört, liegen in der„selben unendlich viele Axen, und diese bilden einen Strahlen„büschel zweiter Ordnung und sind die Schnittlinien der ge„gebenen Ebene mit den übrigen Ebenen des Büschels dritter „Ordnung. In jeder Ebene des Büschels dritter Ordnung giebt „es eine Axe, durch welche keine zweite Ebene des Büschels

„hindurchgeht; dieselbe heisst der Berührungsstrahl der „Ebene, und derjenige Punkt dieser Axe, welcher auf keiner „zweiten Axe liegt, heisst der Berührungspunkt der Ebene. „Durch jeden Punkt des Raumes gehen höchstens drei reelle „Ebenen des Büschels, und mindestens eine, sowie eben so „viele reelle Axen des Büschels. Der Ebenenbüschel dritter „Ordnung wird von je zwei seiner Axen in projectivischen „Punktreihen geschnitten, nämlich jede Ebene des Büschels „in zwei homologen Punkten der Punktreihen. Das Axen- „system wird von je zwei Ebenen seines Ordnungsbüschels in „collinearen ebenen Systemen geschnitten; nämlich jede dritte „Ebene des Ordnungsbüschels wird in zwei homologen Strahlen „und jeder Strahl des Axensystems in zwei homologen Punkten „der collinearen Systeme geschnitten. Drei projectivische Punkt- „reihen, deren Träger a, a_1, a_2 nicht in einer Ebene liegen, er- „zeugen im Allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, von „welchem a, a_1, a_2 drei Axen sind; ebenso ein gerades Ge- „bilde und eine zu ihm projectivische Regelschaar. Durch „sechs Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, „kann nur ein Ebenenbüschel dritter Ordnung gelegt werden.“ U. s. w.

Wie bei den Kegelschnitten, so können wir auch bei den Raumcurven dritter Ordnung mehrere Arten unterscheiden je nach der Anzahl und Lage ihrer unendlich fernen Punkte. Wir können die Tangente eines unendlich fernen Punktes seine Asymptote, und die Schmiegungsebene desselben seine Asymptotenebene nennen. Aus jedem ihrer unendlich fernen Punkte wird die Raumcurve dritter Ordnung durch eine Cylinderfläche zweiter Ordnung projicirt. Die Raumcurve wird von der unendlich fernen Ebene entweder in drei Punkten geschnitten, oder sie hat mit derselben nur einen Schnittpunkt gemein, oder sie wird von ihr in einem Punkte geschnitten und in einem anderen berührt, oder endlich die unendlich ferne Ebene schmiegt sich ihr in einem Punkte an. Wir erhalten demnach vier Arten von Raumcurven dritter Ordnung, welchen Seydewitz folgende Namen gegeben hat:

1) Die räumliche Hyperbel. Sie hat drei unendlich ferne Punkte, deren Asymptoten und Asymptotenebenen in endlicher Entfernung liegen. In ihr schneiden sich drei hyperbolische Cylinder, deren Asymptotenebenen paarweise einander parallel sind.

2) Die räumliche Ellipse (Fig. 15). Sie besitzt einen unendlich fernen Punkt mit einer Asymptote und einer Asymptotenebene in endlicher Entfernung. Durch dieselbe kann nur ein einziger, und zwar ein elliptischer Cylinder gelegt werden.

3) Die parabolische Hyperbel besitzt zwei unendlich ferne Punkte, von deren Asymptoten die eine unendlich fern liegt, die andere dagegen nebst den beiden Asymptotenebenen in endlicher Entfernung. Durch die parabolische Hyperbel kann ein parabolischer und ein hyperbolischer Cylinder gelegt werden.

4) Die räumliche Parabel enthält nur einen unendlich fernen Punkt, dessen Asymptote und Asymptotenebene unendlich fern liegen. Durch dieselbe kann nur ein einziger, nämlich ein parabolischer Cylinder gelegt werden.

Dreizehnter Vortrag.

Projectivische Beziehungen und Polarität der Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Die meisten bisher aufgestellten Sätze über Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung lassen sich weit einfacher aussprechen, wenn wir den Begriff der projectivischen Verwandtschaft auf diese Gebilde ausdehnen. Zu dem Ende stellen wir folgende Definition auf:

Vier Punkte einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung sollen vier harmonische Punkte genannt werden, wenn sie aus irgend einer und folglich (Seite 88) aus jeder Sehne der Curve durch vier harmonische Ebenen, also auch aus jedem Punkte S der Curve durch vier harmonische Strahlen der Kegelfläche Sk^3 II. Ordnung projicirt werden.

Vier Ebenen eines Büschels K^3 dritter Ordnung sollen vier harmonische Ebenen genannt werden, wenn sie von irgend einer und folglich von jeder Axe des Büschels in vier harmonischen Punkten, also auch von jeder Ebene σ des Büschels in vier harmonischen Strahlen des Büschels σK^3 II. Ordnung geschnitten werden.

Ausserdem wollen wir die Raumcurve und den Ebenenbüschel dritter Ordnung mit dem Namen „Elementargebilde dritter Ordnung" bezeichnen. Auch auf sie finden dann ohne Weiteres die allgemeinen Definitionen und Sätze Anwendung, welche früher (I. Abth. Seite 104 und 105) für die Elementargebilde I. und II. Ordnung ausgesprochen wurden; z. B.

„Zwei projectivische Raumcurven dritter Ordnung, die in „einander liegen, haben entweder alle ihre Punkte, oder höchstens „zwei derselben entsprechend gemein."

Die Raumcurve k^3 dritter Ordnung wird aus jeder Sehne a durch einen zu k^3 perspectivischen Ebenenbüschel und aus jedem ihrer Punkte S durch eine zu ihr perspectivische Kegelfläche Sk^3 II. Ordnung projicirt. Zwei zu k^3 perspectivische Ebenenbüschel a und a_1 erzeugen eine zu der Curve perspectivische Kegelfläche oder Regelschaar, je nachdem ihre Axen sich schneiden oder nicht. Viele von den früheren Sätzen können jetzt wie folgt zusammengefasst werden:

Alle Ebenenbüschel, Kegelflächen II. Ordnung und Regelschaaren, welche zu einer Raumcurve dritter Ordnung perspectivisch liegen, sind zu einander projectivisch.

Alle Punktreihen, Strahlenbüschel II. Ordnung und Regelschaaren, welche zu einem Ebenenbüschel dritter Ordnung perspectivisch liegen, sind zu einander projectivisch.

Sollen zwei Raumcurven k^3 und k_1^3 dritter Ordnung projectivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B C von k^3 die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 von k_1^3 entsprechen, so beziehe man irgend zwei Ebenenbüschel, von denen der eine u zu der Curve k^3 und der andere v_1 zu der Curve k_1^3 perspectivisch liegt, in der Weise projectivisch auf einander, dass den Ebenen $\overline{uA}$, $\overline{uB}$, $\overline{uC}$ des ersteren die resp. Ebenen $\overline{v_1 A_1}$, $\overline{v_1 B_1}$, $\overline{v_1 C_1}$ des letzteren entsprechen. Je zwei Punkte der Curven entsprechen sodann einander, wenn sie durch zwei homologe Ebenen der Büschel projicirt werden. — Die projectivischen Raumcurven sind zugleich homologe Gebilde von zwei collinearen räumlichen Systemen. Denn seien D, E, F drei neue Punkte der Curve k^3, denen in k_1^3 die Punkte D_1, E_1, F_1 entsprechen, so können wir zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 collinear so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ die resp. fünf Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 von Σ_1 entsprechen. Dem Ebenenbüschel $\overline{AB}\,(CDEF)$ entspricht dann der ihm projectivische Ebenenbüschel $\overline{A_1 B_1}\,(C_1 D_1 E_1 F_1)$,

also auch der Ebene $\overline{ABF}$ von Σ die Ebene $\overline{A_1 B_1 F_1}$ von Σ_1; und ebenso lässt sich zeigen, dass jeder anderen Ebene von Σ, welche den Punkt F mit irgend einer Kante des Fünfecks $ABCDE$ verbindet, diejenige Ebene von Σ_1 entspricht, welche F_1 mit der entsprechenden Kante des Fünfecks $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ verbindet. Da sonach der Punkt F von Σ als Schnittpunkt von drei jener Ebenen dem Punkte F_1 von Σ_1 als Schnittpunkt der homologen drei Ebenen entspricht, so muss auch der Curve k^3, auf welcher die sechs Punkte A, B, C, D, E, F liegen, die Curve k_1^3 entsprechen, welche die homologen sechs Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 mit einander verbindet; denn durch sechs Punkte des Raumes kann nur eine Raumcurve dritter Ordnung gelegt werden.

Eine involutorische Raumcurve dritter Ordnung wird aus jedem ihrer Punkte durch eine involutorische Kegelfläche II. Ordnung projicirt, und je zwei einander zugeordnete Strahlen der letzteren liegen demnach mit einer Geraden g, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, aber nicht auf derselben enthalten ist, in einer Ebene (I. Abth. Seite 119). Je zwei einander zugeordnete Punkte der Raumcurve liegen also ebenfalls mit g in einer Ebene; und die Verbindungslinien dieser Punktenpaare gehören einer Regelschaar von Sehnen an, von welcher g ein Leitstrahl ist. Wenn die involutorische Curve zwei Ordnungspunkte besitzt, so gehören die Tangenten derselben ebenfalls zu jener Regelschaar; sie trennen in der Regelschaar die eigentlichen Sehnen von den uneigentlichen. Beiläufig folgt mit Berücksichtigung früherer Sätze (Seite 90):

„Wird durch eine Raumcurve dritter Ordnung eine Regel-
„fläche gelegt, so ist jeder Strahl der einen Regelschaar dieser
„Fläche eine Sehne der Curve, während jeder Strahl der zweiten
„Regelschaar die Curve in einem einzigen Punkte schneidet.
„Durch die Strahlen der ersteren Schaar werden die Curven-
„punkte involutorisch gepaart; und entweder ist jeder Strahl
„dieser Schaar eine eigentliche Sehne, oder zwei derselben
„werden von der Curve berührt und trennen die eigentlichen
„Sehnen von den uneigentlichen."

Zu anderen wichtigen Eigenschaften der Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung führen uns die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon. Ich schicke die folgenden Bemerkungen voraus über die durch zwei Punkte S, S_1 und vier beliebige Sehnen a, b, a_1, b_1 bestimmte Raumcurve dritter Ordnung (vgl. Seite 94).

Wir wollen unter den vier Sehnen eine gewisse Reihenfolge a, b, a_1, b_1 festsetzen, so dass dieselben aus S, S_1, und einem beliebigen Punkte S_2 der Raumcurve durch je ein Vierseit im Strahlenbündel projicirt werden, und zwar jedes der Sehnenpaare a, a_1 und b, b_1 durch ein Paar Gegenseiten des Vierseits. Wir verbinden in jedem Vierseite die beiden Strahlen, in welchen die Gegenseiten sich paarweise schneiden, durch eine Ebene, und erhalten so in den collinearen Bündeln S, S_1, S_2 die resp. Ebenen σ, σ_1, σ_2. Dieselben sind homologe Ebenen der Bündel, schneiden sich also in einer und derselben Sehne s. Bewegt sich der Punkt S_2 auf der Raumcurve, so dreht sich daher die Ebene σ_2 um die Sehne s. Hierauf gründet sich eine höchst einfache Construction der Raumcurve dritter Ordnung:

„Seien von der Raumcurve dritter Ordnung gegeben zwei „Punkte S, S_1 und zwei Paare Sehnen a, a_1 und b, b_1. Wir legen „durch S einen Strahl, welcher von a und a_1, und einen „zweiten, welcher von b und b_1 geschnitten wird, und ver„binden beide Strahlen durch eine Ebene σ. Ebenso legen „wir durch S_1 eine Ebene σ_1, welche zwei durch S_1 gehende „und die resp. Sehnenpaare a, a_1 und b, b_1 schneidende „Strahlen enthält, und bestimmen sofort die Schnittlinie s der „Ebenen σ und σ_1. Jede durch s gehende Ebene σ_2 schneidet „alsdann die Sehnenpaare a, a_1 und b, b_1 in zwei Punkten„paaren A, A_1 und B, B_1, deren Verbindungslinien $\overline{AA_1}$ und „$\overline{BB_1}$ sich in einem Punkte S_2 der Raumcurve dritter Ordnung „treffen."

Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich auch, indem man beachtet, dass in der Sehne s und der gesuchten Raumcurve dritter Ordnung sich die beiden Regelflächen schneiden, welche s mit a, a_1 und mit b, b_1 verbinden.

Sei nun der Raumcurve k^3 dritter Ordnung ein Sechseck eingeschrieben, so wird dasselbe aus jedem beliebigen Curvenpunkte S durch ein Sechskant projicirt, welches der Kegelfläche Sk^3 II. Ordnung eingeschrieben ist. Mit Berücksichtigung des Vorhergehenden ergiebt sich also aus dem Lehrsatze des Pascal:

„Jedes der Raumcurve dritter Ordnung eingeschriebene Sechs„eck wird aus einem beliebigen Curvenpunkte S durch ein Sechs„kant projicirt, dessen drei Paar Gegenseiten sich in drei auf „einer Ebene σ gelegenen Geraden schneiden. Bewegt sich S

„auf der Raumcurve, so dreht sich die Ebene σ um eine feste „Sehne s.“

Diese Sehne s ist schon durch zwei Paar Gegenseiten a, a_1 und b, b_1 des Sechsecks völlig bestimmt; in ihr schneiden sich die beiden Regelflächen, durch welche die Raumcurve mit den Sehnenpaaren a, a_1 und b, b_1 verbunden wird.

Von den übrigen Sätzen, die aus dem Lehrsatze des Pascal folgen, will ich nur denjenigen über das eingeschriebene Dreieck (I. Abth. Seite 66) zur Ableitung eines Satzes über die Raumcurve dritter Ordnung benutzen, nämlich des folgenden:

„Ist $SABC$ ein der Raumcurve k^3 dritter Ordnung eingeschriebenes Tetraeder, und sind S_1, A_1, B_1, C_1 die Punkte, „in welchen die Tangenten der resp. vier Eckpunkte S, A, B, „C von den gegenüber liegenden Flächen des Tetraeders geschnitten werden; dann bilden die Punkte S_1, A_1, B_1, C_1 „ein zweites Tetraeder, welches dem ersteren eingeschrieben „und zugleich umschrieben ist. Die Ebene $\overline{A_1 B_1 C_1}$ z. B. geht „durch S; sie dreht sich um eine uneigentliche Sehne s, wenn „S sich auf der Curve k^3 fortbewegt, während die Punkte „A, B, C ihre Lage nicht ändern.“

Nämlich das Dreieck ABC wird aus S durch ein Dreikant projicirt, welches der Kegelfläche Sk^3 II. Ordnung eingeschrieben ist, und die Tangenten der Punkte A, B, C werden durch die Berührungs-Ebenen der drei Kanten $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ projicirt. Die drei Strahlen $\overline{SA_1}$, $\overline{SB_1}$, $\overline{SC_1}$, in welchen die Seiten des Dreikantes von den Berührungs-Ebenen der ihnen gegenüber liegenden Kanten geschnitten werden, müssen deshalb in einer Ebene $\overline{A_1 B_1 C_1}$ liegen. Vertauschen wir S mit einem anderen Curvenpunkte S^1, so erhalten wir statt $\overline{A_1 B_1 C_1}$ eine andere Ebene $\overline{A_1^1 B_1^1 C_1^1}$; diese beiden Ebenen schneiden sich aber in einer Sehne s, weil sie in den collinearen Strahlenbündeln, durch welche die Raumcurve dritter Ordnung und ihr Sehnensystem aus den Punkten S und S^1 projicirt werden, einander entsprechen. Die Sehne s ist eine uneigentliche; denn die Ebene $\overline{SA_1 B_1 C_1}$ hat mit der Kegelfläche Sk^3 keinen reellen Strahl gemein, weil sie von jeder Seite des eingeschriebenen Dreikantes $S(ABC)$ durch den Polstrahl der Seite und die Berührungs-Ebene der gegenüberliegenden Kante harmonisch getrennt ist.

Von diesem Satze lässt sich eine sehr wichtige Anwendung auf die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve dritter Ordnung machen.

Wir bezeichnen mit a, b, c die Tangenten $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ der Punkte A, B, C, und mit P den Punkt, in welchem die Sehne s von der Ebene $\overline{ABC}$ geschnitten wird.*) Dann muss, wie soeben bewiesen, die Schnittlinie der Ebenen $\overline{SBC}$ und $\overline{Sa}$ mit der Sehne s in einer Ebene liegen, wo auch der Punkt S auf der Curve sich befinden möge. Nähert sich nun S unbegrenzt dem Punkte A, so geht die Ebene $\overline{Sa}$ über in die Schmiegungs-Ebene des Punktes A, und $\overline{SBC}$ geht über in die Ebene $\overline{ABC}$; und die Schnittlinie dieser beiden Ebenen muss mit $\overline{AP}$ zusammenfallen, weil sie die Gerade s fortwährend schneiden soll. Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass auch die Schmiegungs-Ebenen der Punkte B und C durch den Punkt P gehen müssen, d. h.:

Die Schmiegungs-Ebenen von drei beliebigen Punkten A, B, C *einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden sich in einem Punkte* P, *der mit* A, B *und* C *in einer Ebene liegt; durch denselben geht eine uneigentliche Sehne der Raumcurve.*

Unmittelbar folgt hieraus:

„Die Raumcurve dritter Ordnung ist von der dritten Classe, „d. h. durch keinen Punkt P des Raumes gehen mehr als drei „ihrer Schmiegungs-Ebenen, also auch durch keine Gerade „mehr als zwei derselben.“

Denn gingen durch P die Schmiegungs-Ebenen von vier Curvenpunkten A, B, C, D, so müssten in der Ebene $\overline{ABP}$ auch die Punkte C und D liegen; was unmöglich ist, da die Ebene höchstens drei Punkte mit der Raumcurve dritter Ordnung gemein haben kann.

Eine zweite unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satze wird durch die erste Hälfte des Doppelsatzes ausgesprochen:

Vier Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung bilden ein Tetraeder, ihre vier Schmiegungs-Ebenen ein zweites Tetraeder; jedes dieser Tetraeder ist dem anderen sowohl um- als auch eingeschrieben.

Vier Ebenen eines Ebenenbüschels dritter Ordnung bilden ein Tetraeder, ihre vier Berührungspunkte ein zweites Tetraeder; jedes dieser Tetraeder ist dem anderen sowohl ein- als auch umgeschrieben.

Mittelst dieses Satzes kann in jedem Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung die Schmiegungs-Ebene construirt werden, sobald

---

*) Die Sehne s kann nicht in die Ebene $\overline{ABC}$ hineinfallen, weil diese höchstens drei Sehnen ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$) enthalten kann.

von drei Punkten die Schmiegungs-Ebenen bekannt sind. Ausserdem ergiebt sich, dass die gegenseitige Lage von vier Punkten einer Raumcurve dritter Ordnung und ihren vier Schmiegungs-Ebenen dieselbe ist, wie diejenige von vier Berührungspunkten eines Ebenenbüschels dritter Ordnung und den zugehörigen vier Ebenen desselben. Diese Bemerkung führt uns zu folgendem Hauptsatze über die Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung:

Die sämmtlichen Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve k^3 *dritter Ordnung bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.*

Die sämmtlichen Berührungspunkte eines Ebenenbüschels dritter Ordnung bilden eine Raumcurve dritter Ordnung.

Seien α, β, γ die Schmiegungs-Ebenen der resp. Curvenpunkte A, B, C, und P ihr in $\overline{ABC}$ gelegener Schnittpunkt. Wenn alsdann C die Raumcurve k^3 durchläuft, so beschreibt die Ebene $\overline{ABC}$ einen zu k^3 perspectivischen Ebenenbüschel $\overline{AB}$; zugleich schneidet sie in jeder ihrer Lagen die Gerade $\alpha\beta$ in einem Punkte P, durch welchen auch die Schmiegungs-Ebene γ des Punktes C hindurchgeht. Der von $\overline{ABC}$ beschriebene Ebenenbüschel $\overline{AB}$ ist also auch perspectivisch zu der Punktreihe $\overline{\alpha\beta}$, welche der Punkt $\alpha\beta\gamma$ oder P bei der gleichzeitigen Bewegung der Schmiegungs-Ebene γ beschreibt. Vertauschen wir nun A und B mit irgend zwei anderen festen Curvenpunkten A^1 und B^1, und berücksichtigen wir, dass je zwei Ebenenbüschel $\overline{AB}$ und $\overline{A^1B^1}$, welche beide zu der Curve k^3 perspectivisch liegen, zu einander projectivisch sind, so folgt:

„Durch die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve dritter
„Ordnung werden alle Punktreihen, in deren Trägern je zwei
„(α, β oder α^1, β^1) dieser Schmiegungs-Ebenen sich schneiden,
„projectivisch auf einander bezogen."

Wählen wir von diesen projectivischen Punktreihen irgend drei, die nicht in einer Ebene liegen, so erzeugen dieselben die sämmtlichen Schmiegungs-Ebenen; nämlich je drei homologe Punkte derselben bestimmen eine Schmiegungs-Ebene. Anderseits wissen wir bereits, dass die drei Punktreihen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung erzeugen (S. 95); folglich ist bewiesen, dass die Schmiegungs-Ebenen einer Raumcurve dritter Ordnung einen Ebenenbüschel dritter Ordnung bilden.

Dieser Satz und viele der früheren lassen eine sehr merkwürdige Analogie zwischen den Raumcurven dritter Ordnung und den Kegelschnitten erkennen. Dieselbe wird noch auffallender

dadurch, dass durch jede Raumcurve dritter Ordnung ein Nullsystem bestimmt ist, ähnlich wie durch jeden Kegelschnitt ein ebenes Polarsystem. Nämlich:

> *Eine Raumcurve* k³ *dritter Ordnung und der Ebenenbüschel, welcher derselben sich anschmiegt, können als zwei einander zugeordnete Gebilde eines Nullsystems betrachtet werden, in welchem jeder Punkt der Curve seiner Schmiegungs-Ebene und jede Tangente sich selbst zugeordnet ist. Die Raumcurve* k³ *heisst eine „Ordnungscurve" dieses durch sie bestimmten Nullsystems.*

Wenn dieser Satz richtig ist, so ist durch ihn der vorhergehende Satz zum zweiten Male bewiesen. Denn in zwei reciproken räumlichen Systemen entspricht jeder Raumcurve dritter Ordnung ein Ebenenbüschel dritter Ordnung; und in dem Nullsystem ist folglich der Raumcurve dritter Ordnung ein Ebenenbüschel dritter Ordnung zugeordnet.

Das Nullsystem, von welchem im Satze die Rede ist, kann aber auf folgende Art nachgewiesen werden. Seien A, B, C, D, E, F beliebige sechs Punkte der Raumcurve k^3, und α, β, γ, δ, ε, φ ihre resp. Schmiegungs-Ebenen. Dann können wir zwei räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok so auf einander beziehen, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ die resp. fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε von Σ_1 entsprechen. Die Punktreihe $\overline{\alpha\beta}$ von Σ_1 entspricht dann dem Ebenenbüschel $\overline{AB}$ von Σ und ist ein Schnitt desselben, weil drei Punkte von $\overline{\alpha\beta}$, nämlich $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$ und $\alpha\beta\varepsilon$, in den ihnen entsprechenden Ebenen $\overline{ABC}$, $\overline{ABD}$ und $\overline{ABE}$ des Büschels $\overline{AB}$ liegen (Seite 101). Aus demselben Grunde liegt jeder andere Punkt von Σ_1, welchen irgend zwei der Ebenen α, β, γ, δ, ε mit einander gemein haben, auf der ihm entsprechenden Ebene von Σ. Zwei reciproke räumliche Systeme Σ und Σ_1 bilden nun entweder ein Nullsystem, so dass jeder Punkt von Σ_1 auf der ihm entsprechenden Ebene von Σ enthalten ist, oder die sämmtlichen Punkte von Σ_1, für welche dieses stattfindet, liegen auf einer Fläche II. Ordnung. Das letztere kann im vorliegenden Falle nicht eintreten, weil sonst diese Fläche II. Ordnung mit jeder von den fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε vier Gerade gemein haben müsste, z. B. mit α die Geraden $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\alpha\varepsilon}$, was unmöglich ist. Folglich bilden die reciproken Systeme Σ und Σ_1 ein Nullsystem, und jedem beliebigen Punkte F der Raumcurve k^3 ist eine durch ihn gehende Ebene φ^1 zugeordnet. Da F in der Ebene $\overline{ABF}$ liegt, so muss φ^1 durch den Pol dieser Ebene

gehen, d. h. durch den Schnittpunkt der Geraden $\overline{\alpha\beta}$ mit der Ebene $\overline{ABF}$; durch denselben Punkt geht aber auch die Schmiegungs-Ebene φ des Punktes F, und ebenso müssen die Geraden $\overline{\alpha\gamma}$, $\overline{\alpha\delta}$, $\overline{\alpha\varepsilon}$, $\overline{\beta\gamma}$ u. s. w. mit φ^1 dieselben Punkte gemein haben wie mit φ, und φ^1 muss also mit φ zusammenfallen. Jedem Curvenpunkte F ist demnach seine Schmiegungs-Ebene φ zugeordnet; und da die Tangente von F in φ liegt, so ist sie sich selbst zugeordnet und ein Leitstrahl des Nullsystems.

Zwei collinearen Strahlenbündeln S und S_1, welche die Raumcurve k^3 und deren sämmtliche Sehnen erzeugen, sind in dem Nullsystem zwei collineare ebene Systeme σ und σ_1 zugeordnet, welche den an k^3 sich anschmiegenden Ebenenbüschel dritter Ordnung und dessen sämmtliche Axen erzeugen. Jeder Sehne der Curve ist also eine Axe des Ebenenbüschels geordnet und zwar jeder uneigentlichen Sehne eine uneigentliche Axe. Da der Schnittpunkt von drei reellen Schmiegungs-Ebenen der Raumcurve allemal auf einer uneigentlichen Sehne liegt (Seite 101), so ergiebt sich daraus:

„Eine beliebige Ebene enthält eine eigentliche oder un-
„eigentliche Axe des Ebenenbüschels, jenachdem sie die Raum-
„curve dritter Ordnung in einem oder in drei reellen Punkten
„schneidet."

Jede Tangente gehört zu dem Sehnensystem der Curve, also auch, da sie sich selbst zugeordnet ist, zum Axensystem des Ebenenbüschels dritter Ordnung. Beiläufig ergiebt sich hieraus:

„Die sämmtlichen Tangenten einer Raumcurve dritter Ord-
„nung werden aus jedem Punkte S der Curve durch einen
„Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt, und von jeder Schmie-
„gungs-Ebene σ in einer Punktreihe II. Ordnung geschnitten."

Der erste Theil des Satzes wurde schon früher (Seite 88) bewiesen; aus ihm folgt der zweite Theil. Da die räumliche Parabel eine unendlich ferne Schmiegungs-Ebene hat, so ergiebt sich inbesondere:

„Die Tangenten- und Schmiegungs-Ebenen einer räumlichen
„Parabel sind den Strahlen und Berührungs-Ebenen einer Kegel-
„fläche II. Ordnung parallel."

Die Raumcurve dritter Ordnung und der sich anschmiegende Ebenenbüschel dritter Ordnung sind als zwei einander zugeordnete Gebilde des Nullsystems auch projectivisch. Jedes dritte Gebilde, welches zu einem von ihnen perspectivisch ist, muss deshalb zu dem anderen projectivisch sein.

Für die Raumcurve dritter Ordnung gilt der Satz, dass dieselbe durch drei ihrer Punkte S, S_1, A und die Tangenten und Schmiegungs-Ebenen von zwei derselben S, S_1 bestimmt ist. Denn aus jedem dieser beiden Punkte wird die Curve durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, von welcher sich sofort drei Strahlen und die Berührungs-Ebenen von zwei dieser Strahlen angeben lassen; diese beiden Kegelflächen sind also bekannt und sie schneiden sich in der Raumcurve. Der reciproke Satz lautet:

„Ein Ebenenbüschel dritter Ordnung ist durch drei seiner „Ebenen und die Berührungsstrahlen und Berührungspunkte „von zwei derselben bestimmt.“

Gewöhnlich aber giebt man demselben folgende Fassung:

„Eine Raumcurve dritter Ordnung ist durch zwei ihrer „Punkte, deren Tangenten und Schmiegungs-Ebenen und eine „dritte Schmiegungs-Ebene bestimmt.“

In ähnlicher Form wollen wir für einige früher bewiesene Sätze die reciproken Sätze aussprechen. Wir fassen dieselben zusammen wie folgt:

„Eine Raumcurve dritter Ordnung ist im Allgemeinen be„stimmt, wenn von ihr gegeben sind:

„1) sechs Schmiegungs-Ebenen; 2) fünf Schmiegungs-Ebenen „und die Tangente in einer derselben; 3) vier Schmiegungs„Ebenen und die Tangenten in zwei derselben; 4) drei „Schmiegungs-Ebenen und deren Tangenten; 5) zwei „Schmiegungs-Ebenen und vier Axen (Seite 94); 6) drei „Schmiegungs-Ebenen und drei Axen; 7) fünf Schmiegungs„Ebenen und eine Axe; u. s. w.“

Die Raumcurve oder vielmehr der sich anschmiegende Ebenenbüschel dritter Ordnung kann in jedem der genannten Fälle leicht construirt werden. Sind z. B. im Falle 5) die Schmiegungs-Ebenen Σ, Σ_1 und die vier Axen a, b, c, d gegeben, so beziehen wir die ebenen Systeme Σ und Σ_1 collinear so auf einander, dass jede der Axen a, b, c, d zwei homologe Punkte von Σ und Σ_1 enthält; dann erzeugen die beiden collinearen Systeme den Ebenenbüschel dritter Ordnung und dessen Axensystem. Die Ausnahmefälle, in welchem die Construction unmöglich ist oder die Curve zerfällt, ergeben sich überall von selbst.

Vierzehnter Vortrag.

Conjugirte Punkte bezüglich einer Raumcurve dritter Ordnung.

Wir können die Theorie der Raumcurven dritter Ordnung nicht abschliessen, ohne noch eine Haupt-Eigenschaft derselben gebührend hervorzuheben, von welcher wir später mehrfach Gebrauch machen werden. Wir haben bewiesen, dass sich in der Raumcurve dritter Ordnung unendlich viele Regelflächen und Kegelflächen II. Ordnung schneiden; und zwar kann die Curve mit je zwei ihrer Sehnen durch eine solche geradlinige Fläche II. Ordnung verbunden werden. Ich behaupte nun:

Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes A *in Bezug auf alle durch die Raumcurve* k^3 *dritter Ordnung gelegten Flächen II. Ordnung schneiden sich in einem Punkte* A_1, *welcher auf der durch* A *gehenden Sehne der Curve liegt.*

Ist A ein Punkt der Curve, so berührt seine Tangente a die Curve k^3 und deshalb auch jede durch k^3 gelegte Fläche II. Ordnung. Die sämmtlichen Polar-Ebenen des Punktes A gehen folglich in diesem Falle durch die Tangente a, und jeder beliebige Punkt A_1 der letzteren kann als Schnittpunkt dieser Polar-Ebenen aufgefasst werden. Liegt dagegen A nicht auf der Raumcurve k^3, so geht durch A eine einzige Sehne s der Curve. Dieselbe kann zunächst eine eigentliche sein, welche zwei Punkte M und N mit der Raumcurve gemein hat; alsdann muss derjenige Punkt A_1 von s, welcher durch M und N harmonisch von A getrennt ist, in allen jenen Polar-Ebenen liegen. Die Sehne s kann ferner in einem Punkte S die Curve k^3 berühren; dann berührt sie in S auch jede durch k^3 gelegte Fläche II. Ordnung, und die sämmtlichen Polar-Ebenen von A schneiden sich im Punkte S, mit welchem in diesem Falle A_1 identisch ist. Unser Satz ist also nur noch für den letzten Fall zu beweisen, in welchem die Sehne s eine uneigentliche ist.

Seien F^2 und F_1^2 zwei durch k^3 gelegte Flächen II. Ordnung, von denen F^2 eine Kegelfläche sein möge. Wir verbinden den Punkt A mit dem Mittelpunkte dieser Kegelfläche durch eine Gerade g, und suchen zu jedem Punkte von g die Polar-Ebenen

in Bezug auf F^2 und F_1^2. Wir erhalten dann eine einzige Polar-Ebene γ bezüglich der Fläche F^2 und einen Büschel g_1 von Polar-Ebenen in Bezug auf F_1^2; letzterer ist projectivisch zu der Punktreihe g. Die sämmtlichen Sehnen, welche aus den Punkten der Geraden g an die Raumcurve dritter Ordnung gezogen werden können, bilden eine zu g perspectivische Regelschaar, welche von der Ebene γ in einer zu g und folglich auch zum Ebenenbüschel g_1 projectivischen Punktreihe I. oder II. Ordnung geschnitten wird. Wir wissen nun bereits, dass jede eigentliche Sehne der Regelschaar mit γ einen Punkt gemein hat, welcher auch auf der ihm entsprechenden Ebene von g_1 liegt; jene Punktreihe muss deshalb zu dem Ebenenbüschel g_1 perspectivische Lage haben, weil unendlich viele Punkte derselben auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen. Durch den Punkt A_1, in welchem die Sehne $\overline{AA_1}$ oder s von der Ebene γ geschnitten wird, geht folglich auch die Polar-Ebene des Punktes A in Bezug auf jede beliebige, durch k^3 gelegte Fläche F_1^2 II. Ordnung.

Die zu g perspectivische Sehnenschaar wird von der Ebene γ im Allgemeinen in einer Curve II. Ordnung geschnitten, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche F^2 hindurchgeht. Nur wenn g in der Schmiegungs-Ebene dieses Mittelpunktes liegt, und folglich die Tangente des letzteren zu der Sehnenschaar gehört, zerfällt jene Curve II. Ordnung in zwei Gerade, nämlich in jene Tangente und einen Leitstrahl g' der Sehnenschaar; denn weil γ die Polar-Ebene von g ist in Bezug auf die Kegelfläche F^2, so muss γ die Berührungsstrahlen der beiden aus g an F^2 gelegten Berührungs-Ebenen enthalten, und einer derselben ist jene Tangente der Raumcurve dritter Ordnung.

Wir nennen der Einfachheit wegen zwei Punkte „conjugirt" bezüglich der Raumcurve k^3 dritter Ordnung, wenn sie wie A und A_1 in Bezug auf jede durch k^3 gelegte Fläche II. Ordnung conjugirt sind. Ebenso heissen zwei Ebenen in Hinsicht auf einen Ebenenbüschel dritter Ordnung conjugirt, wenn sie in Bezug auf jede dem Ebenenbüschel eingeschriebene Regelfläche oder Curve II. Ordnung conjugirt sind. Aus unserer Beweisführung folgt alsdann:

Jede Verbindungslinie von zwei Punkten A und A_1, welche bezüglich einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung conjugirt sind, ist eine Sehne von k^3. Schneidet

Jede Schnittlinie von zwei Ebenen α und α_1, welche bezüglich eines Ebenenbüschels dritter Ordnung conjugirt sind, ist eine Axe des Büschels. Gehen durch

die Sehne $\overline{AA_1}$ die Curve in zwei reellen Punkten M und N, so sind durch diese die Punkte A und A_1 harmonisch getrennt. Berührt $\overline{AA_1}$ die Curve, so fällt einer der Punkte A und A_1 mit dem Berührungspunkte zusammen. Ein Punkt der Raumcurve ist jedem Punkte seiner Tangente, also auch sich selbst conjugirt. Die Punkte einer Sehne sind involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Punkte derselben einander zugeordnet werden.

$\overline{\alpha\alpha_1}$ zwei reelle Ebenen μ und ν des Ebenenbüschels, so sind die Ebenen α und α_1 durch μ und ν harmonisch getrennt. Ist $\overline{\alpha\alpha_1}$ ein Berührungsstrahl des Büschels, so fällt eine der Ebenen α und α_1 mit der durch $\overline{\alpha\alpha_1}$ gehenden Ebene des Büschels zusammen. Eine Ebene des Büschels ist jeder Ebene ihres Berührungsstrahles, also auch sich selbst conjugirt. Die Ebenen einer Axe sind involutorisch gepaart, wenn je zwei conjugirte Ebenen derselben einander zugeordnet werden.

„Schneidet eine Gerade g die Raumcurve dritter Ordnung „in einem einzigen Punkte P, so liegen alle diejenigen Punkte, „welche den Punkten von g conjugirt sind, im Allgemeinen auf „einer durch P gehenden Curve II. Ordnung, dem Punkte P „aber sind alle Punkte seiner Tangente p conjugirt. Daraus „folgt, dass die Polaren der Geraden g bezüglich aller die „Raumcurve enthaltenden Flächen II. Ordnung sowohl die Curve „II. Ordnung als auch die Tangente p schneiden müssen; diese „Polaren bilden ein Strahlensystem erster Ordnung zweiter „Classe."

„Nur dann, wenn die Gerade g in der Schmiegungs-Ebene „des Punktes P liegt, sind ihren Punkten diejenigen einer „anderen Geraden g' conjugirt, von welcher die Raumcurve in „einem Punkte P' geschnitten wird. Die Gerade g' liegt in „der Schmiegungs-Ebene von P' und schneidet die Tangente „des Punktes P; ebenso schneidet g die Tangente von P'. „Die Polaren von g bezüglich aller durch die Raumcurve „gehenden Flächen II. Ordnung bilden ein Strahlensystem „I. Ordnung und I. Classe, dessen Axen von g' und der Tan„gente des Punktes P gebildet werden."

Die Halbirungspunkte aller zu einer Asymptoten-Ebene parallelen Sehnen einer Raumcurve dritter Ordnung liegen in einer die Raumcurve schneidenden Geraden; denn sie sind den unendlich fernen Punkten der Asymptoten-Ebene conjugirt.

Sei l eine ganz beliebige Gerade und seien l_1, l_2, l_3 ihre Polaren in Bezug auf irgend drei, durch die Raumcurve gelegte Flächen II. Ordnung. Dann bilden die Polaren der sämmtlichen Punkte von l drei Ebenenbüschel l_1, l_2, l_3, welche zu der Punktreihe l und folglich auch zu einander projectivisch sind, also im Allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen. Von letzterer sind l_1, l_2, l_3 Sehnen, und jeder Punkt dieser neuen Raumcurve dritter Ordnung ist einem Punkte von l conjugirt; also:

„Diejenigen Punkte, welche hinsichtlich einer Raumcurve k^3 „dritter Ordnung den Punkten einer beliebigen Geraden l conjugirt sind, liegen im Allgemeinen auf einer zweiten Raumcurve dritter Ordnung, zu deren Sehnen alle Polaren von l „bezüglich der durch k^3 gelegten Flächen II. Ordnung gehören.“

Nur wenn l eine Sehne der Raumcurve k^3 ist oder mit k^3 einen Punkt P gemein hat, erleidet dieser Satz Ausnahmen, welche in den vorhergehenden Sätzen angegeben sind.

Wird die Raumcurve k^3 als Ordnungscurve eines Nullsystems betrachtet, ist sie also dem Ebenenbüschel K^3 dritter Ordnung zugeordnet, welcher ihr sich anschmiegt, so sind je zwei Punkten, welche hinsichtlich der Curve k^3 conjugirt sind, zwei hinsichtlich des Büschels K^3 conjugirte Ebenen zugeordnet. Hiernach können zu den letzten Sätzen leicht die reciproken gebildet werden. Ich erwähne nur folgenden Satz:

„Zu jeder Geraden g, welche die Raumcurve k^3 in einem „Punkte P schneidet und in der Schmiegungs-Ebene dieses „Punktes liegt, kann eine Gerade g' construirt werden, welche „ebenfalls von k^3 in einem Punkte P' geschnitten wird und „in der Schmiegungs-Ebene von P' liegt, und zwar so, dass „nicht nur jedem Punkte von g ein Punkt von g' hinsichtlich „der Curve k^3 conjugirt ist, sondern auch jeder Ebene von g „eine Ebene von g' hinsichtlich des Büschels K^3.“

Der erste Theil des Satzes wurde schon vorhin bewiesen; aus ihm folgt der letzte Theil, wenn man erwägt, dass g und g' in dem Nullsysteme sich selbst zugeordnet sind.

Den sämmtlichen Punkten einer Ebene γ sind hinsichtlich der Raumcurve k^3 die sämmtlichen Punkte einer krummen Fläche Γ^3 conjugirt. Dieselbe hat mit einer Geraden l, die nicht ganz in ihr liegt, höchstens drei Punkte gemein, ist also von der dritten Ordnung; denn den Punkten von l sind diejenigen einer Raumcurve dritter Ordnung conjugirt, welche mit der Ebene γ höchstens

drei Punkte gemein hat und nur in besonderen Fällen in Gerade und Kegelschnitte ausarten kann. Die Fläche Γ^3 geht durch die Raumcurve k^3, weil γ von jeder Tangente dieser Curve einen Punkt enthält; sie geht ausserdem durch alle Raumcurven dritter Ordnung, welche den Geraden der Ebene γ conjugirt sind. Ist A ein gemeinschaftlicher Punkt von γ und der Raumcurve k^3, so geht Γ^3 durch die Tangente von A; jeder durch A gehenden Geraden von γ ist eine Curve II. Ordnung conjugirt, welche auf der Fläche Γ^3 enthalten ist, und letztere kann sonach auch durch eine veränderliche Curve II. Ordnung beschrieben werden. Die Schmiegungs-Ebene des Punktes A wird von γ in einer Geraden geschnitten, welcher eine auf Γ^3 gelegene Gerade conjugirt ist. Die Fläche Γ^3 geht durch jede in γ enthaltene Sehne der Raumcurve k^3.

Hat beispielsweise die Ebene γ drei Punkte A, B, C mit der Raumcurve k^3 gemein, so schneidet sie die Fläche Γ^3 in den drei Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$; auch muss Γ^3 die Tangenten der Punkte A, B, C enthalten. Und wenn mit P derjenige Punkt von γ bezeichnet wird, in welchem die Schmiegungs-Ebenen der Punkte A, B, C sich schneiden, so geht die Fläche Γ^3 dritter Ordnung durch die drei Geraden, deren Punkte denjenigen von $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ conjugirt sind. Diese drei Geraden müssen sich in dem zu P conjugirten Punkte schneiden und in der zu γ conjugirten Ebene liegen. — Schmiegt die Ebene γ sich der Raumcurve k^3 an in einem Punkte A, so ist die Fläche Γ^3 geradlinig und kann durch eine Gerade beschrieben werden. Rückt γ ins Unendliche, so ergiebt sich der Satz: Die Halbirungspunkte aller Sehnen einer Raumcurve dritter Ordnung liegen in einer Fläche dritter Ordnung.

Ich schliesse diesen Vortrag mit dem Beweise des wichtigen Satzes:

Eine Raumcurve k³ *dritter Ordnung kann mit einer beliebigen Sehne* s *durch unendlich viele geradlinige Flächen II. Ordnung verbunden werden; durch jeden ausserhalb* k³ *und* s *gelegenen Punkt* P *geht eine einzige dieser Flächen, deren Gesammtheit ein „Flächenbüschel" heissen möge. Die Polar-Ebenen jedes beliebigen Punktes* A *in Bezug auf alle Flächen des Büschels schneiden sich in einer Geraden.*

Durch den Punkt P geht eine Sehne p der Curve k^3, und p bestimmt mit der Sehne s eine durch k^3 gehende Regelfläche oder Kegelfläche II. Ordnung (Seite 88), welche dem Flächenbüschel

angehört und den Punkt P enthält. Um auch den letzten Theil des Satzes zu beweisen, unterscheiden wir drei Fälle. Zunächst möge A auf der Raumcurve k^3 enthalten sein; dann schneiden sich in der Tangente von A die Polar-Ebenen dieses Punktes bezüglich aller durch k^3 gelegten Flächen II. Ordnung. Liegt ferner der Punkt A auf der Sehne s, durch welche alle Flächen des Büschels hindurchgehen, so berühren seine Polar-Ebenen in A die zugehörigen Flächen des Büschels und müssen deshalb sämmtlich durch die Sehne s gehen. Wenn endlich der Punkt A weder auf der Curve k^3 noch auf der Sehne s liegt, so müssen seine sämmtlichen Polar-Ebenen zunächst durch den ihm conjugirten Punkt A_1 hindurchgehen. Einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt A_2 der Polar-Ebenen von A können wir in der Ebene $\overline{As}$ sofort construiren, falls diese Ebene weder durch die Sehne $\overline{AA_1}$ geht, noch die Raumcurve k^3 in einem Punkte von s berührt und in einem zweiten schneidet. Denn die Ebene $\overline{As}$ schneidet alsdann die Raumcurve in einem Punkte M, welcher ausserhalb der Sehnen $\overline{AA_1}$ und s liegt, und A_2 ist derjenige Punkt der Geraden $\overline{AM}$, welcher durch M und s harmonisch von A getrennt, also dem Punkte A conjugirt ist in Bezug auf alle Flächen des Büschels. Die Polar-Ebenen von A müssen folglich durch die Gerade $\overline{A_1A_2}$ gehen, und der Satz ist bewiesen für jeden Punkt A, dessen Sehne $\overline{AA_1}$ nicht von s in einem Curvenpunkte geschnitten wird, und welcher auch nicht auf einer durch s gehenden Berührungs-Ebene der Curve k^3 enthalten ist. Je nachdem s eine uneigentliche oder eigentliche Sehne ist, müssen wir somit den Beweis noch führen für keine oder für diejenigen Punkte, welche auf den beiden Kegelflächen des Büschels oder auf den beiden durch s gehenden Berührungs-Ebenen von k^3 enthalten sind.

Sei nun A auf einer dieser beiden Kegelflächen oder Berührungs-Ebenen gelegen, und g eine beliebige durch A gehende Gerade, seien ferner F_1, F_2, F_3 irgend drei Flächen des Büschels. Die Polar-Ebenen der sämmtlichen Punkte von g hinsichtlich der Flächen F_1, F_2, und F_3 bilden drei zu der Punktreihe g und folglich auch zu einander projectivische Ebenenbüschel g_1, g_2 und g_3. Für unendlich viele Punkte der Geraden g ist nun schon der Satz bewiesen, dass ihre Polar-Ebenen hinsichtlich des Büschels in einer und derselben Geraden sich schneiden; also müssen die Ebenenbüschel g_1, g_2 und g_3 ein und dasselbe Strahlengebilde I. oder II. Ordnung mit einander erzeugen, und zwar im Allgemeinen

eine Regelschaar, zu welcher die Ebenenbüschel perspectivisch liegen, und die Polar-Ebenen des Punktes A müssen ebenfalls in einer und derselben Geraden sich schneiden. Zugleich ergiebt sich:

„Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden g, so beschreibt „die Gerade, in welcher seine Polar-Ebenen in Bezug auf die „Flächen des Büschels sich schneiden, im Allgemeinen eine „Regelschaar; die Polaren der Geraden g sind Leitstrahlen „dieser Regelschaar."

Der Flächenbüschel wird von einer beliebigen Ebene in einem „Büschel von Curven II. Ordnung" geschnitten. Derselbe hat, wie aus dem soeben Bewiesenen sich ergiebt, folgende Eigenschaften:

„Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des „Büschels. Die Polaren jedes beliebigen Punktes in Bezug „auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels gehen durch einen „und denselben Punkt. Wenn irgend zwei Kegelschnitte des „Büschels sich in einem Punkte schneiden oder berühren, so „müssen in diesem Punkte alle Curven des Büschels sich „schneiden resp. berühren; denn der Punkt liegt auf allen „seinen Polaren, und diese vereinigen sich im letzteren Falle „mit der gemeinschaftlichen Tangente der Curven."

Einem beliebigen Punkte P der Ebene ist demnach bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels ein Punkt P_1 conjugirt, durch welchen die Polaren von P gehen. Die Polaren aller Punkte einer Geraden g in Bezug auf zwei jener Kegelschnitte bilden aber zwei zu g projectivische Strahlenbüschel; dieselben erzeugen einen Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der Bündel, d. h. durch die Pole von g geht. Also:

„Den Punkten einer Geraden g sind bezüglich des Kegel- „schnittbüschels die Punkte eines zu g projectivischen Kegel- „schnittes conjugirt, welche durch die Pole von g in Bezug „auf die Kegelschnitte des Büschels hindurchgeht."

Andere Eigenschaften der Kegelschnittbüschel werden wir durch die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades kennen lernen.

Fünfzehnter Vortrag.

Projectivische Verwandtschaft zwischen einem Strahlensystem erster Ordnung und einem ebenen System. Geradlinige Flächen vierter Ordnung, welche durch projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung erzeugt werden.

Verschiedene Sätze des eilften und zwölften Vortrages, die wir weiteren Untersuchungen zu Grunde legen wollen, lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

„Zwei collineare Strahlenbündel S, S', die weder concentrisch „noch perspectivisch liegen, erzeugen ein Strahlensystem erster „Ordnung, ausserdem aber eine Linie k^3 dritter Ordnung, welche „durch alle Schnittpunkte homologer Strahlen der Bündel geht. „Diese Linie k^3 enthält alle singulären Punkte des Strahlen-„Systems, und jeder Strahl des letzteren ist eine Sehne (resp. „Tangente) von k^3. Das Strahlensystem ist von der dritten, „zweiten oder ersten Classe, jenachdem die Linie k^3 eine „Raumcurve dritter Ordnung ist, oder in einen Kegelschnitt „und eine Gerade zerfällt, oder sich auf $\overline{SS'}$ und zwei andere „Gerade u, v reducirt; im letzten Falle können u und v con-„jugirt-imaginär sein oder zusammenfallen. Die Linie k^3 geht „durch die Mittelpunkte der collinearen Bündel S, S' und „wird aus ihnen durch Kegelflächen zweiter Ordnung projicirt, „welche jedoch in dem zweiten und dem dritten der genannten „Fälle in je zwei Ebenen zerfallen."

Wir unterlassen es, zu diesen Sätzen die reciproken, welche wir ebenfalls benutzen werden, hinzuzufügen.

Beziehen wir nun die Bündel S, S' reciprok auf ein ebenes System Σ_1, so ist dadurch auch das Strahlensystem erster Ordnung projectivisch auf Σ_1 bezogen. Nämlich jedem Punkte von Σ_1 entsprechen zwei homologe Ebenen der collinearen Bündel und deren zu dem Strahlensystem gehörige Schnittlinie, und einer beliebigen geraden Punktreihe von Σ_1 entspricht eine zu ihr projectivische Kegelfläche oder Regelschaar zweiter Ordnung, welche durch zwei homologe Ebenenbüschel von S und S' erzeugt wird.

Den das Strahlensystem bildenden Sehnen der Linie k^3 entsprechen also die Punkte der Ebene Σ_1; insbesondere entsprechen den Tangenten und Punkten von k^3 die Punkte und Tangenten eines zu k^3 projectivischen Kegelschnittes $\varkappa_1^2$, welcher als Curve zweiter Classe sich auf zwei Punkte reducirt, wenn k^3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in drei Gerade zerfällt. Einer geraden Punktreihe von Σ_1 entspricht in dem Strahlensysteme eine Kegelfläche oder Regelschaar zweiter Ordnung, jenachdem die Gerade den Kegelschnitt $\varkappa_1^2$ berührt oder nicht. Einem beliebigen Punkte von Σ_1 entspricht demnach eine eigentliche oder uneigent-Sehne von k^3, jenachdem er ausserhalb oder innerhalb $\varkappa_1^2$ liegt.

Denjenigen Strahlen des Systems, welche eine demselben nicht angehörige Gerade g schneiden, entsprechen in Σ_1 die Punkte eines zu g projectivischen Kegelschnittes γ_1^2. Projiciren wir nämlich die Punktreihe g aus dem Punkte S durch einen Strahlenbüschel, so entspricht demselben in dem Bündel S' ein zu g projectivischer Strahlenbüschel, welcher mit g einen Ebenenbüschel II. (oder ausnahmsweise I.) Ordnung erzeugt; jede Ebene dieses Büschels, welchem in Σ_1 der Kegelschnitt γ_1^2 entspricht, hat mit der homologen Ebene des Bündels S einen die Gerade g schneidenden Strahl des Systems gemein. Der Kegelschnitt γ_1^2 zerfällt in eine Tangente von k_1^2 und eine zu g projectivische gerade Punktreihe, wenn in einem Punkte von g ausnahmsweise zwei homologe Strahlen der Bündel S und S' sich schneiden, wenn also g mit k^3 einen Punkt U gemein hat. Da durch die Gerade g im Allgemeinen unendlich viele Ebenen gelegt werden können, welche je drei Sehnen von k^3 enthalten, so können dem Kegelschnitte γ_1^2 im Allgemeinen unendlich viele Dreiecke eingeschrieben werden, welche dem Kegelschnitt k_1^2 umschrieben sind.

Einer beliebigen Curve II. Ordnung φ_1^2 von Σ_1 entspricht in dem Strahlensysteme erster Ordnung eine geradlinige Fläche F^4, nämlich jedem Punkte von φ_1^2 eine gerade Erzeugende von F^4. Da nun φ_1^2 mit γ_1^2 höchstens vier Punkte gemein hat, so giebt es auf F^4 höchstens vier Strahlen, welche die beliebige Gerade g schneiden; die Fläche F^4 ist also von der vierten Ordnung. Sie geht durch die Punkte der Linie k^3 im Allgemeinen zweimal, weil φ_1^2 mit den Tangenten von $\varkappa_1^2$ im Allgemeinen je zwei Punkte gemein hat, und wird erzeugt durch zwei projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung, welche in den collinearen Bündeln S, S' der Curve φ_1^2 entsprechen. Da durch diese beiden projectivischen Ebenen-

büschel die collineare Verwandtschaft der Bündel völlig bestimmt ist, so ergiebt sich:

„Zwei nicht concentrische, projectivische Ebenenbüschel „II. Ordnung erzeugen im Allgemeinen eine geradlinige Fläche „vierter Ordnung mit einer Doppelpunktslinie k^3 dritter Ord- „nung; die Strahlen der Fläche sind Sehnen von k^3 und werden „aus je zwei Punkten dieser Linie durch projectivische Ebenen- „büschel zweiter Ordnung projicirt.“

Der letzte Theil dieses Satzes erleidet nur dann gewisse leicht angebbare Einschränkungen, wenn k^3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in drei Gerade zerfällt. Nämlich die Strahlen der geradlinigen Fläche vierter Ordnung werden im ersteren Falle aus je zwei Punkten des Kegelschnittes und im letzteren Falle aus je zwei Punkten der zu k^3 gehörigen Geraden $\overline{SS'}$, auf welcher die Mittelpunkte der beiden erzeugenden Ebenenbüschel liegen, durch projectivische Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt. In dem letzteren Falle ist $\overline{SS'}$ ein zweifacher Strahl der Fläche.

Lassen wir den Kegelschnitt φ_1^2 zusammenfallen mit $\varkappa_1^2$ oder mit einem der Kegelschnitte γ_1^2, so ergiebt sich:

„Die Tangenten der Raumcurve k^3 dritter Ordnung liegen „auf einer (abwickelbaren) Fläche vierter Ordnung. Diejenigen „Sehnen der Raumcurve k^3, welche eine beliebige Gerade g „schneiden, liegen ebenfalls auf einer geradlinigen Fläche vierter „Ordnung.“

Die letztere Fläche hat mit einer durch g gelegten Ebene im Allgemeinen drei Sehnen gemein und wird von ihr in den Schnittpunkten von g und den drei Sehnen berührt; die Ebenen des Büschels g sind demnach dreifach berührende Ebenen dieser Fläche.

Die allgemeinere Fläche F^4 kann auch beschrieben werden mittelst einer Linie dritter Ordnung k^3 und einer Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf k^3 liegt. Nämlich alle Sehnen von k^3, welche die Kegelfläche berühren, liegen auf einer Fläche F^4 vierter Ordnung, weil sie aus dem Mittelpunkte der Kegelfläche durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt werden. Durch einen beliebigen Punkt P von k^3 gehen zwei reelle oder zwei imaginäre Gerade der Fläche F^4, jenachdem P ausserhalb oder innerhalb der Kegelfläche liegt; im letzteren Falle ist P ein isolirter Doppelpunkt der Fläche. Die beiden durch P gehenden Geraden von F^4 fallen zusammen, wenn P auf der Kegel-

fläche zweiter Ordnung liegt; in diesem Falle ist P ein Rückkehrpunkt der Fläche F^4 und letztere wird längs der durch P gehenden „singulären" Erzeugenden von einer einzigen Ebene berührt. Die geradlinige Fläche F^4 hat im Allgemeinen höchstens vier Rückkehrpunkte und singuläre Erzeugende; und zwar entsprechen den Rückkehrpunkten die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\varkappa_1^2$ und φ_1^2. Nur wenn φ_1^2 mit $\varkappa_1^2$ zusammenfällt, wenn also F^4 die Tangentenfläche der Raumcurve k^3 dritter Ordnung ist, hat F^4 jeden Punkt dieser Raumcurve zum Rückkehrpunkt. Im Allgemeinen enthält F^4 höchstens vier Tangenten von k^3; denselben entsprechen die gemeinschaftlichen Punkte von $\varkappa_1^2$ und φ_1^2.

Eine Ebene, welche zwei sich schneidende Strahlen der Fläche F^4 verbindet, schneidet dieselbe ausserdem in einer zu φ_1^2 projectivischen Curve II. Ordnung φ^2. Nämlich je zwei projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung, welche die Fläche F^4 erzeugen, werden von der Ebene in zwei zu φ_1^2 projectivischen Strahlenbüscheln II. Ordnung geschnitten, und da letztere zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen projectivischen Kegelschnitt φ^2 (I. Abth. Seite 113). Wenn F^4 aus allen eine Gerade g schneidenden Sehnen der Linie k^3 besteht, so zerfällt φ^2 in g und eine Sehne von k^3; in jedem anderen Falle kann die Fläche F^4 nicht blos durch projectivische Ebenenbüschel, sondern auch auf die reciproke Art durch projectivische Curven zweiter Ordnung φ^2 erzeugt werden. Die Ebenen aller dieser auf F^4 liegenden Curven II. Ordnung bilden einen Ebenenbüschel K^3 dritter Ordnung und sind doppelt berührende Ebenen der Fläche F^4.

Wir erhalten drei verschiedene Hauptarten der geradlinigen Fläche F^4 vierter Ordnung, jenachdem ihre Doppelpunkts-Linie k^3 eine irreducible Raumcurve dritter Ordnung ist, oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder endlich in drei Gerade zerfällt. Der von den doppelt berührenden Ebenen gebildete Büschel ist, wie wir sehen werden, bei der ersten Hauptart ein irreducibler Ebenenbüschel dritter Ordnung; bei der zweiten und der dritten Hauptart zerfällt er in zwei Ebenenbüschel I. und II. Ordnung resp. in drei Ebenenbüschel I. Ordnung. Wir wollen diese drei Hauptarten jede für sich untersuchen.

Wenn die Linie k^3 in drei Gerade SS', u, v zerfällt, von denen die letzteren beiden auch imaginär sein oder zusammenfallen können, so werden die Strahlen der Fläche F^4 aus den Punkten der Geraden $\overline{SS'}$ durch Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt und

von den durch $\overline{SS'}$ gehenden Ebenen in Curven II. Ordnung geschnitten. Alle diese Ebenenbüschel und Curven aber sind projectivisch zu einander (Seite 78) und zu dem Kegelschnitt φ_1^2. Wenn eine Gerade an zwei windschiefen Geraden u, v hingleitet und dabei beständig einen Kegelschnitt φ^2 schneidet oder eine beliebige Kegelfläche zweiter Ordnung berührt, so beschreibt sie diese Art von Flächen vierter Ordnung. Die Geraden u und v sind, wie man auch aus dieser Erzeugungsart leicht erkennt, Doppelpunkts-Gerade der Fläche F^4; die Gerade $\overline{SS'}$ aber, welche in der Ebene des Kegelschnittes φ^2 liegt und u und v schneidet, ist ein eigentlicher oder isolirter Doppelstrahl oder ein Rückkehrstrahl von F^4, jenachdem sie zwei reelle oder zwei imaginäre Punkte oder einen Berührungspunkt mit φ^2 gemein hat. Die doppelt berührenden Ebenen dieser F^4 bilden drei gewöhnliche Ebenenbüschel mit den Axen $\overline{SS'}$, u und v. Die Ebenen von $\overline{SS'}$ schneiden die Fläche in Curven II. Ordnung, diejenigen von u und v in je zwei reellen oder imaginären Erzeugenden. Die Fläche F^4 ist sich selbst reciprok und in unendlich vielen Nullsystemen sich selbst zugeordnet, weil ihre Strahlen einem Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und folglich unendlich vielen linearen Strahlencomplexen angehören.

Wenn zweitens die Linie k^3 zerfällt in eine Gerade v und eine Curve II. Ordnung k^2, welche mit v einen Punkt gemein hat (Seite 86), so liegen die Strahlen der Fläche F^4 in einem Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Classe und werden aus den Punkten von k^2 durch projectivische Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Wenn an einem Kegelschnitt k^2 und einer Geraden v, die sich in einem Punkte schneiden, eine Gerade hingleitet und dabei beständig eine Kegelfläche zweiter Ordnung berührt, deren Mittelpunkt auf k^2 liegt, so beschreibt sie diese Art von Flächen vierter Ordnung. Ein Punkt von k^2 ist ein eigentlicher oder ein isolirter Doppelpunkt der Fläche F^4, jenachdem er ausserhalb oder innerhalb der Kegelfläche liegt. — Jede Ebene des Büschels v ist eine doppelt berührende Ebene der Fläche F^4; sie schneidet die Fläche in v und zwei reellen oder imaginären Strahlen, welche mit v die beiden Berührungspunkte gemein haben. Andere doppelt berührende Ebenen erhalten wir, wenn wir je zwei, durch einen Punkt von v gehende Strahlen F^4 verbinden; diese Ebenen schneiden die Fläche F^4 ausserdem in projectivischen Curven II. Ordnung, durch welche F^4 erzeugt werden kann, und bilden einen Ebenen-

büschel II. Ordnung. Sie können nämlich nicht zwei Büschel I. Ordnung bilden, weil sonst die Fläche zu der vorhin betrachteten Hauptart gehören würde. Der Ebenenbüschel K^3 dritter Ordnung, welcher die doppelt berührenden Ebenen dieser Fläche F^4 enthält, zerfällt also in den Ebenenbüschel v und einen Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher mit v eine Ebene gemein hat. Auch diese Hauptart von geradlinigen Flächen vierter Ordnung ist sich selbst reciprok; doch giebt es kein Nullsystem, in welchem ihre Strahlen sich selbst zugeordnet wären.

Da die Fläche F^4 im Allgemeinen auch durch projectivische Curven II. Ordnung erzeugt werden kann, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass ihre doppelt berührenden Ebenen nur dann drei Ebenenbüschel erster oder zwei Ebenenbüschel erster und zweiter Ordnung bilden, wenn ihre Doppelpunkts-Linie k^3 in drei Gerade oder in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt.

Wenn also die Doppelpunkte der Fläche F^4 in einer irreduciblen Raumcurve k^3 dritter Ordnung liegen, so bilden ihre doppelt berührenden Ebenen einen irreduciblen Ebenenbüschel K^3 dritter Ordnung. Eine Ausnahme macht nur die besondere Fläche, welche alle eine Gerade g schneidenden Sehnen k^3 enthält; dieser Fläche aber ist diejenige reciprok, welche durch alle eine Gerade schneidenden Axen eines irreduciblen Ebenenbüschels dritter Ordnung geht und von welcher die Punkte jener Geraden dreifache Punkte sind. Sehen wir von diesem Specialfalle ab, so gilt der Satz*):

„Die geradlinige Fläche F^4 vierter Ordnung mit einer irre-„duciblen Doppelpunktscurve k^3 dritter Ordnung ist sich selbst „reciprok und besteht aus allen Strahlen eines linearen Strahlen-„complexes, welche Sehnen von k^3 sind.“

Wir beweisen den Satz unter der Voraussetzung, dass es auf k^3 „eigentliche“ Doppelpunkte von F^4 gebe, in welchen je zwei reelle Strahlen der Fläche sich schneiden. Seien A und B zwei dieser Doppelpunkte, a, a' und b, b' die durch sie gehenden Strahlenpaare von F^4 und α und β deren Ebenen. Dann werden die Strahlen der Fläche F^4 aus den Punkten A und B durch zwei Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt und von den Ebenen α und β in zwei Curven II. Ordnung geschnitten, welche durch jene Strahlen projectivisch auf einander bezogen sind. Durch diese

*) Dieser Satz rührt von Clebsch her (Math. Ann. Bd. II), der nachfolgende synthetische Beweis von Herrn Richard Krause („Ueber ein specielles Gebüsch von Flächen II. Ordnung“, Inaug.-Diss., Strassb. 1879).

projectivischen Elementargebilde zweiter Ordnung wird aber zwischen den Strahlenbündeln A, B, die wir zu einem Raume Σ, und den resp. ebenen Systemen α, β, die wir zu einem zweiten Raume Σ_1 rechnen wollen, eine reciproke Beziehung bedingt; und zwar hat A mit α und ebenso B mit β einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, weil jeder in α liegende Strahl des Bündels A, welcher zwei von a und a' verschiedene Gerade p, q von F^4 schneidet, mit dem ihm entsprechenden Strahle von α, welcher dieselben Geraden p, q schneiden muss, zusammenfällt. Dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{AB}$ der beiden Bündel entspricht ferner die gemeinschaftliche Gerade $\overline{\alpha\beta}$ der beiden ebenen Systeme; denn den durch $\overline{AB}$ gehenden Ebenen $\overline{Ab}$ und $\overline{Ab'}$ von A oder $\overline{Ba}$ und $\overline{Ba'}$ von B entsprechen die in $\overline{\alpha\beta}$ liegenden Punkte $\dot{a}b$ und $\dot{a}b'$ von α resp. $\dot{\beta}a$ und $\dot{\beta}a'$ von β. Die Bündel A, B von Σ sind demnach durch die Fläche F^4 reciprok so auf die resp. ebenen Systeme α, β von Σ_1 bezogen, dass sie mit ihnen je einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben und dass jeder gemeinschaftlichen Ebene von A und B ein auf ihr liegender gemeinschaftlicher Punkt von α und β entspricht. Dadurch aber sind auch die beiden Räume Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen, sodass sie nicht nur jene beiden Strahlenbüschel, sondern auch alle Strahlen der Fläche F^4 entsprechend gemein haben. Die beiden Räume bilden folglich zusammen ein Nullsystem (vgl. Seite 65, 66), zu dessen Leitstrahlen die Geraden von F^4 gehören; jedem Doppelpunkte von F^4 ist in diesem Nullsysteme eine doppelt berührende Ebene von F^4 zugeordnet. Die Fläche F^4 wird auch gebildet von denjenigen Leitstrahlen des Nullsystems, welche Axen des von den doppelt berührenden Ebenen gebildeten Ebenenbüschels dritter Ordnung sind.

Sechzehnter Vortrag.

Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades.

Wenn ein ebenes System Σ auf zweifache Art auf ein anderes ebenes System Σ_1 reciprok und folglich auf sich selbst collinear bezogen wird, so entsprechen jedem Punkte P_1 von Σ_1 zwei homologe Gerade p und p' von Σ und damit auch deren Schnittpunkt P;

umgekehrt entsprechen dem Punkte P von Σ zwei Gerade in Σ_1 und deren Schnittpunkt P_1. Wenn der Punkt P_1 sich in einer Geraden bewegt, so beschreibt der entsprechende Punkt P im Allgemeinen nicht eine Gerade, sondern eine Curve zweiter Ordnung; die beiden homologen Strahlen p und p' nämlich beschreiben zwei projectivische Strahlenbüschel, und diese erzeugen, wenn sie nicht perspectivisch liegen, die von P beschriebene Curve zweiter Ordnung. Indem wir annehmen, dass die collineare Beziehung des Systems Σ auf sich selbst, welche aus der zweifachen reciproken sich ergiebt, keine perspectivische ist, erhalten wir den Satz:

> „Durch die zweifache reciproke Verwandtschaft von Σ und „Σ_1 wird zwischen diesen ebenen Systemen eine quadratische „Beziehung oder eine geometrische Verwandtschaft zweiten „Grades hergestellt, sodass einem beliebigen Punkte des einen „Systems im Allgemeinen ein Punkt, einer beliebigen Punkt- „reihe erster Ordnung aber eine zu ihr projectivische Punkt- „reihe zweiter Ordnung in dem anderen Systeme entspricht. „Die quadratische Verwandtschaft von Σ und Σ_1 ist eine „durchaus wechselseitige.“

Dieser quadratischen Verwandtschaft von Σ und Σ_1 steht eine andere gegenüber, bei welcher jedem Strahle von Σ im Allgemeinen ein Strahl von Σ_1 entspricht, einem beliebigen Strahlenbüschel erster Ordnung aber ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Indem man eines der beiden ebenen Systeme durch ein zu ihm reciprokes ersetzt, erhält man noch eine dritte Verwandtschaft zweiten Grades zwischen Ebenen, sodass jedem Punkte der einen ein Strahl der anderen Ebene entspricht, jeder Punktreihe erster Ordnung der ersteren aber ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung der letzteren. Wir wollen nur die zuerst hergestellte quadratische Verwandtschaft näher untersuchen und auch auf die analogen Verwandtschaften, welche sich zwischen Strahlenbündeln herstellen lassen, hier nicht eingehen.

Da Σ auf doppelte Weise reciprok auf Σ_1 bezogen ist, sodass jedem Punkte oder Strahle von Σ_1 zwei Strahlen resp. Punkte von Σ entsprechen, so erhalten wir in Σ zwei collineare ebene Systeme. Projiciren wir diese beiden collinearen Systeme aus irgend zwei Punkten, deren Verbindungslinie weder durch einen sich selbst entsprechenden Punkt geht, noch einen sich selbst entsprechenden Strahl schneidet, so erhalten wir zwei collineare, zu Σ_1 reciproke Strahlenbündel, welche das Sehnensystem einer

Raumcurve k^3 dritter Ordnung erzeugen. Dieses Sehnensystem aber ist durch die beiden Strahlenbündel projectivisch auf Σ_1 bezogen (Seite 113), und von ihm ist das andere ebene System Σ ein Schnitt. Dadurch ist die Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft von Σ und Σ_1 mit einer früheren Untersuchung in nahen Zusammenhang gebracht.

Jedem Punkte von Σ_1 entspricht eine Sehne von k^3 und deren Schnittpunkt in Σ; jeder Geraden a_1 von Σ_1 entspricht in dem Sehnensystem eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch die Raumcurve k^3 geht, und daher in Σ ein Kegelschnitt, welcher alle gemeinschaftlichen Punkte von Σ und k^3 enthält; dreht sich die Gerade a_1 in Σ_1 um einen auf ihr liegenden Punkt, so beschreibt die entsprechende Fläche II. Ordnung in dem Sehnensystem einen Flächenbüschel und folglich der entsprechende Kegelschnitt in Σ einen Kegelschnittbüschel (Seite 112). Für solche Büschel von Curven zweiter Ordnung können wir aus der quadratischen Verwandtschaft sofort gewisse Haupt-Eigenschaften ableiten.

Sei A_1 der Mittelpunkt eines in Σ_1 liegenden Strahlenbüschels und A der entsprechende Punkt von Σ, durch welchen alle Curven des zugehörigen Kegelschnittbüschels gehen, sei ferner g eine beliebige Punktreihe I. Ordnung von Σ, welcher in Σ_1 ein zu g projectivischer Kegelschnitt γ_1^2 entspricht. Wenn die Gerade g nicht durch A geht, so geht γ_1^2 nicht durch A_1; in diesem Falle werden also die Punkte des Kegelschnittes γ_1^2 durch den Strahlenbüschel A_1, und folglich diejenigen der Geraden g durch den Kegelschnittbüschel A involutorisch gepaart. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass γ_1^2 in zwei Gerade g_1 und u_1, von welchen die eine g_1 zu g projectivisch ist, zerfällt, wenn g die Raumcurve k^3 in einem Punkte U schneidet (Seite 114). Wenn die Gerade g durch den Punkt A geht, so hat sie mit den Kegelschnitten des Büschels noch je einen von A verschiedenen Punkt gemein; zugleich geht dann γ_1^2 durch A_1. Da nun alle in Σ_1 liegenden Geraden g_1 und alle durch A_1 gehenden Kegelschnitte γ_1^2 durch den Strahlenbüschel A_1 projectivisch auf einander bezogen werden, so folgt:

„Durch den Kegelschnittbüschel werden alle Punktreihen „I. Ordnung g, welche je einen gemeinschaftlichen Punkt der „Kegelschnitte enthalten, projectivisch auf einander bezogen, so „dass auf jedem Kegelschnitt eine Gruppe homologer Punkte „der Punktreihen liegt. Jede Gerade, welche durch keinen

„solchen gemeinschaftlichen Punkt hindurchgeht, wird von dem „Kegelschnittbüschel in einer involutorischen Punktreihe ge- „schnitten, so dass je zwei einander zugeordnete Punkte der „Reihe auf einem und demselben Kegelschnitt des Büschels „liegen.“

Aus dem zweiten dieser Sätze folgt, dass der Büschel durch zwei seiner Kegelschnitte völlig bestimmt ist. Um nämlich einen beliebigen dritten, durch einen gegebenen Punkt P gehenden Kegelschnitt des Büschels zu construiren, legen wir durch P Strahlen, welche die gegebenen beiden Kegelschnitte α^2 und β^2 in je zwei Punkten schneiden. Da α^2 und β^2 bei der vorliegenden Art von Büscheln mindestens einen gemeinschaftlichen Punkt haben, so sind unendlich viele solche Strahlen möglich. Die beiden Punktenpaare, in welchen ein solcher Strahl s von α^2 und β^2 geschnitten wird, bestimmen in s eine involutorische Punktreihe; und suchen wir in dieser den zu P zugeordneten Punkt, so liegt derselbe auf dem durch P gehenden Kegelschnitte des Büschels. Sind von dem Büschel drei Kegelschnitte gegeben, so kann ein beliebiger vierter auch mittelst des ersten der obigen Sätze leicht construirt werden.

In der Ebene Σ, welche wir als Schnitt des zu Σ_1 projectivischen Sehnensystems der Raumcurve k^3 auffassen lernten, liegen auch einzelne Sehnen und Punkte von k^3, nämlich höchstens drei Punkte und drei Sehnen und mindestens ein Punkt und eine Sehne. Die sämmtlichen Punkte einer solchen Sehne u entsprechen einem und demselben Punkte U_1 des ebenen Systems Σ_1; und einem gemeinschaftlichen Punkte U von Σ und k^3 entsprechen in Σ_1 die sämmtlichen Punkte einer Geraden u_1, welcher in dem Sehnensysteme die Kegelfläche Uk^3 II. Ordnung entspricht. Die Punkte U und U_1 bilden also eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jedem Punkte des einen Systems ein einziger Punkt des anderen entspricht. Wir wollen sie „Hauptpunkte“ der ebenen Systeme nennen, und die ihnen entsprechenden Geraden sollen „Hauptlinien“ heissen. In jeder Ebene Σ liegen (Seite 91) eben so viele Punkte wie Sehnen der Raumcurve dritter Ordnung; also:

„Das ebene System Σ enthält eben so viele Hauptlinien wie „Hauptpunkte, und zwar mindestens eine und höchstens drei; „genau so viele wie Σ besitzt auch Σ_1, weil jedem Hauptpunkte „des einen Systems eine Hauptlinie des anderen entspricht. Die „Verbindungslinie von zwei Hauptpunkten eines Systems ist

„eine Hauptlinie desselben und der Schnittpunkt von zwei
„Hauptlinien ist ein Hauptpunkt."

Der letzte Theil des Satzes folgt daraus, dass jede Verbindungslinie von zwei Punkten der Raumcurve k^3 eine Sehne derselben ist, und jeder Schnittpunkt von zwei Sehnen auf der Curve liegt.

Jeder geraden Punktreihe von Σ_1 entspricht in dem Sehnensystem der Raumcurve k^3 eine durch k^3 gehende Fläche II. Ordnung; und wir wissen, dass die Punkte einer beliebigen Sehne paarweise conjugirt sind in Bezug auf alle durch k^3 gelegten Flächen II. Ordnung. Die Kegelschnitte in Σ, welche den Geraden von Σ_1 entsprechen, liegen nun aber auf diesen Flächen II. Ordnung, so dass sich ergiebt:

„Die Kegelschnitte des einen Systems Σ, welche den Geraden
„des anderen Σ_1 entsprechen, gehen durch alle Hauptpunkte
„von Σ; die Punkte jeder Hauptlinie von Σ sind paarweise
„conjugirt hinsichtlich aller jener Kegelschnitte."

Analoges gilt für die Kegelschnitte von Σ_1, welche den Geraden von Σ entsprechen.

Einem beliebigen Kegelschnitt φ_1^2 von Σ_1 entspricht (Seite 114) in Σ eine Curve φ^4 IV. Ordnung, welche jeden Hauptpunkt von Σ zum Doppelpunkt hat. Geht φ_1^2 durch einen Hauptpunkt von Σ_1, so zerfällt φ^4 in eine Hauptlinie von Σ und eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Geht φ_1^2 durch zwei Hauptpunkte von Σ_1, so zerfällt φ^4 in zwei Hauptlinien von Σ und eine zu φ_1^2 projectivische Curve II. Ordnung. Denken wir uns die geometrische Verwandtschaft zwischen Σ und Σ_1 dadurch hergestellt, dass diese beiden Systeme in doppelter Weise reciprok auf einander bezogen wurden, so entsprechen dem Kegelschnitt φ_1^2 von Σ_1 zwei Strahlenbüschel II. Ordnung in Σ, so wie die Curve, auf welcher je zwei homologe Strahlen dieser Büschel sich schneiden. D. h.:

„Zwei projectivische Strahlenbüschel II. Ordnung, die in
„derselben Ebene liegen, erzeugen im Allgemeinen eine Curve
„vierter Ordnung mit höchstens drei Doppelpunkten und min-
„destens einem solchen. Diese Curve kann zerfallen in eine
„Gerade und eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppel-
„punkt, oder in zwei Gerade und einen Kegelschnitt, oder
„endlich in vier Gerade."

Sei U ein Hauptpunkt und g eine beliebige durch ihn gehende Gerade von Σ; dann zerfällt der Kegelschnitt von Σ_1 welcher der Geraden g entspricht, in die dem Punkte U entsprechende Haupt-

linie u_1 und eine zu g projectivische Gerade g_1. Denn alle Sehnen der Raumcurve k^3, welche von g ausserhalb des Punktes U getroffen werden, bilden eine Regelschaar, und dieser entspricht in Σ_1 die Punktreihe g_1. Die Gerade g_1 muss durch einen Hauptpunkt U_1 der Ebene Σ_1 hindurchgehen; denn weil g ein Leitstrahl der Regelschaar ist, so liegt ein Strahl u derselben in der durch g gehenden Ebene Σ, und der dem u entsprechende Hauptpunkt U_1 ist deshalb auf g_1 enthalten. Den sämmtlichen durch U gehenden Geraden g von Σ müssen demnach die sämmtlichen durch U_1 gehenden Geraden g_1 von Σ_1 entsprechen. Wir wollen die Punkte U und U_1 zwei „einander zugeordnete" Hauptpunkte der Systeme nennen. Die Büschel U und U_1 sind projectivisch; denn einer beliebigen Geraden a von Σ entspricht in Σ_1 ein zu a projectivischer, durch U_1 gehender Kegelschnitt α_1^2, und die Büschel U und U_1 liegen perspectivisch zu a resp. α_1^2. Also:

„Die Hauptpunkte der Systeme Σ und Σ_1 sind paarweise „einander zugeordnet, so dass jeder Geraden g von Σ, welche „durch einen Hauptpunkt U geht, eine zu g projectivische Gerade „g_1 von Σ_1 entspricht, welche durch den zugeordneten Haupt-„punkt U_1 geht. Die Büschel U und U_1 sind projectivisch in „Ansehung ihrer einander entsprechenden Geraden."

Da eine Curve II. Ordnung von Σ, welche durch zwei Hauptpunkte U, V geht, aus U und V durch projectivische Strahlenbüschel projicirt wird, und weil diesen in Σ_1 zwei projectivische Büschel U_1 und V_1 entsprechen, so ergiebt sich:

„Jedem Kegelschnitte des einen ebenen Systems, welcher „durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht in dem anderen „System ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt, welcher durch „die zugeordneten beiden Hauptpunkte geht."

Wir können die ebenen Systeme in eine solche Lage bringen, dass die Büschel U und U_1 perspectivisch werden, d. h. Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind. Sei z die durch U und U_1 gehende Axe dieses Ebenenbüschels; dann liegen je zwei einander entsprechende Punkte der Systeme mit z in einer Ebene. Projiciren wir die Systeme Σ und Σ_1 beziehungsweise aus zwei beliebigen auf z liegenden Punkten S und S_1, so erhalten wir zwei quadratisch verwandte Strahlenbündel. Je zwei homologe Strahlen dieser Bündel liegen mit z in einer Ebene und schneiden sich; und alle so entstehenden Schnittpunkte sind auf einer durch S und S_1 gehenden Fläche enthalten, welche mit jeder Ebene der

Bündel S und S_1 einen Kegelschnitt gemein hat, also eine Fläche II. Ordnung sein muss. Geht nämlich eine beliebige Ebene durch $\overline{SS_1}$, so enthält sie zwei projectivische Strahlenbüschel der Bündel S und S_1, und diese Strahlenbüschel erzeugen jenen Kegelschnitt. Geht die Ebene durch den Punkt S, so enthält sie von S einen Strahlenbüschel, welchem im Bündel S_1 eine durch $\overline{S_1 U_1}$ gehende Kegelfläche II. Ordnung entspricht, und letztere hat mit der Ebene den erwähnten, durch S gehenden Kegelschnitt gemein. Ist u die Hauptlinie von Σ, welche dem Hauptpunkte U_1 von Σ_1 entspricht, so ist $\overline{Su}$ die Berührungs-Ebene der Fläche II. Ordnung im Punkte S; denn jeder in $\overline{Su}$ liegende Strahl von S entspricht dem gemeinschaftlichen Hauptstrahle $\overline{S_1 S}$ der Bündel und berührt in S die Fläche. Man kann sich auf diese Weise mittelst der Flächen II. Ordnung eine sehr einfache und deutliche Vorstellung von der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades machen.

Beispiele von geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades sind uns schon in der ersten Abtheilung dieses Buches mehrfach (Seite 85, 152, 169, 170) begegnet, von denen hier nur das Princip der reciproken Radien erwähnt sei. Wir fügen noch folgende Beispiele hinzu:

„Ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe wird „von zwei beliebigen Ebenen in quadratisch verwandten ebenen „Punktsystemen geschnitten und aus zwei beliebigen Punkten „durch quadratisch verwandte Ebenenbündel projicirt."

„Ein Ebenenbündel zweiter Ordnung wird von je zwei „seiner Ebenen in quadratisch verwandten Strahlensystemen „geschnitten."

„Ordnet man in einem ebenen Polarsysteme jedem Strahle „den ihm conjugirten Normalstrahl zu, so erhält man zwei „quadratisch verwandte ebene Strahlensysteme in involutorischer „Lage."

Siebenzehnter Vortrag.

Collineare Systeme, welche in einander liegen. Involutorische Systeme in der Ebene und im Raume.

Zwei collineare Systeme Σ und Σ_1, die in derselben Ebene liegen, haben alle ihre Elemente entsprechend gemein und sind identisch, sobald sie ein Viereck entsprechend gemein haben (Seite 14); sie liegen perspectivisch, d. h. sie haben eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel erster Ordnung entsprechend gemein, sobald sie drei Punkte einer Geraden oder auch drei Strahlen eines Punktes entsprechend gemein haben (Seite 16). Wie viele Punkte und Strahlen haben sie entsprechend gemein, wenn sie weder identisch sind, noch perspectivisch liegen?

Um diese Frage zu entscheiden, nehmen wir ausserhalb der Ebene, in welcher die collinearen Systeme Σ und Σ_1 liegen, zwei beliebige Punkte S und S_1 an, deren Verbindungslinie weder einen Punkt noch einen Strahl trifft, der in den Systemen sich selbst entspricht. Projiciren wir sodann die Systeme Σ und Σ_1 aus den resp. Punkten S und S_1, so werden diese zu Mittelpunkten von zwei collinearen Strahlenbündeln, welche eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen. Und jeder Punkt, welchen Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, liegt auf dieser Raumcurve, denn er ist der Schnittpunkt von zwei homologen Strahlen der Bündel S und S_1; ebenso ist jeder Strahl, welchen Σ und Σ_1 entsprechend gemein haben, eine Sehne der Raumcurve dritter Ordnung. Wir erhalten somit den Satz (vergl. Seite 88 und 91):

Zwei collineare ebene Systeme, die auf einander, aber nicht perspectivisch liegen, haben entweder die Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks, oder zwei Punkte und zwei Gerade (von denen die eine jene beiden Punkte verbindet und in einem derselben von der anderen Geraden geschnitten wird), oder endlich einen Punkt und eine Gerade entsprechend gemein.

Diese drei Fälle treten ein, je nachdem die Raumcurve dritter Ordnung mit der Ebene der collinearen Systeme drei oder zwei Punkte oder einen Punkt gemein hat.

Zwei collineare Strahlenbündel, die concentrisch, aber nicht perspectivisch liegen, haben entweder die Kanten und Seiten eines Dreikants, oder zwei Strahlen und zwei Ebenen, oder einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein. Dieser Satz folgt aus dem vorhergehenden mittelst des Gesetzes der Reciprocität, oder auch, indem man die collinearen Bündel durch eine Ebene in zwei collinearen Systemen schneidet. Ebenso folgt: Sind im Raume gegeben ein ebenes System Σ und ein zu demselben collinearer Strahlenbündel S, so gehen im Allgemeinen mindestens ein Strahl und eine Ebene, und höchstens drei Strahlen und drei Ebenen von S durch die ihnen entsprechenden Elemente von Σ, falls nicht Σ zu einem Schnitt von S, oder zu S selbst perspectivisch liegt.

Zwei collineare räumliche Systeme haben alle ihre Elemente entsprechend gemein und sind identisch, sobald sie fünf Punkte entsprechend gemein haben, von denen keine vier in einer Ebene liegen (Seite 23); sie liegen perspectivisch, d. h. sie haben einen Strahlenbündel und ein ebenes System entsprechend gemein, sobald sie ein ebenes Viereck oder auch ein Vierkant entsprechend gemein haben (Seite 20 und 27). Wenn zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 ein Tetraeder $ABCD$ entsprechend gemein haben, und wenn ausserdem irgend einem Punkte P von Σ, welcher in keiner Fläche des Tetraeders liegt, ein Punkt P_1 von Σ_1 entspricht, so können folgende Fälle eintreten: Wenn die Gerade $\overline{PP_1}$ durch einen Eckpunkt A des Tetraeders hindurchgeht, so haben die Systeme vier Strahlen und folglich alle Elemente des Bündels A und ebenso das ebene System BCD entsprechend gemein, und liegen perspectivisch. Werden zwei Gegenkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Tetraeders von der Geraden $\overline{PP_1}$ geschnitten, so haben die collinearen Systeme drei und folglich alle durch $\overline{AB}$ oder $\overline{CD}$ gehenden Ebenen, also auch alle auf diesen Kanten liegenden Punkte entsprechend gemein, so wie jeden Strahl, welcher sowohl von $\overline{AB}$ als auch von $\overline{CD}$ geschnitten wird. Schneidet $\overline{PP_1}$ nur eine Kante $\overline{AB}$ des Tetraeders, so haben die Systeme drei und folglich alle durch $\overline{AB}$ gehenden Ebenen, also auch jeden auf $\overline{CD}$ liegenden Punkt entsprechend gemein, ausserdem aber die Ebenen $\overline{ACD}$ und $\overline{BCD}$, sowie jeden durch A oder B gehenden Strahl dieser Ebenen. Wenn endlich die Gerade $\overline{PP_1}$ mit keiner Kante des Tetraeders in einer Ebene liegt, so haben die collinearen Systeme nur die Eckpunkte, Kanten und Seiten des Tetraeders $ABCD$ entsprechend gemein.

Wir wollen nicht alle übrigen Fälle aufzählen, in denen zwei collineare räumliche Systeme einzelne oder auch unendlich viele Elemente entsprechend gemein haben, sondern uns mit folgenden Bemerkungen begnügen. Es kann der Fall eintreten (und die geschaart-involutorischen Systeme werden uns ein Beispiel hierfür liefern), dass die Systeme keinen reellen Punkt und keine Ebene entsprechend gemein haben; wenn aber ein Punkt S des Systems Σ mit dem entsprechenden Punkte S_1 von Σ_1 zusammenfällt, so haben die collinearen Strahlenbündel S und S_1 und folglich auch die räumlichen Systeme noch mindestens einen Strahl und eine Ebene entsprechend gemein. Ebenso wenn eine Ebene α von Σ mit der entsprechenden Ebene α_1 von Σ_1 zusammenfällt, so haben die räumlichen Systeme mindestens einen Punkt und einen Strahl der Ebene α entsprechend gemein (Seite 126); denn in α liegen zwei collineare ebene Systeme, die in den räumlichen Systemen einander entsprechen.

Zwei collineare Grundgebilde können auch involutorische Lage haben, so dass jedem ihrer Elemente ein anderes doppelt entspricht. Die Gebilde haben alsdann unendlich viele Elemente entsprechend gemein, namentlich jeden Strahl, welcher irgend zwei homologe Punkte der Gebilde mit einander verbindet, oder in welchem irgend zwei homologe Ebenen sich schneiden. Denn wenn (Fig. 16) einem Punkte, den wir mit A oder B_1 bezeichnen wollen, je nachdem er zu dem einen oder dem anderen der collinearen Gebilde gerechnet wird, zwei zusammenfallende Punkte A_1 und B entsprechen, so fällt auch die Gerade $\overline{AB}$ des ersten Gebildes mit ihrer entsprechenden $\overline{A_1 B_1}$ zusammen. Liegen zwei collineare ebene Systeme involutorisch, so haben dieselben sonach unendlich viele Strahlen entsprechend gemein und folglich perspectivische Lage. Je zwei homologe Punkte derselben liegen in einer Geraden mit dem Collineationscentrum S, welches in diesem Falle das „Involutionscentrum" heissen soll; und je zwei homologe Strahlen schneiden sich auf der Collineationsaxe u, welche in diesem Falle auch wohl die „Involutionsaxe" genannt wird. Jede durch das Involutionscentrum S gehende Gerade ist der Träger einer involutorischen Punktreihe, von welcher S und der auf u liegende Punkt die Ordnungspunkte sind; und ebenso ist jeder Punkt der Collineationsaxe u der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, von welchem u und der durch S gehende Strahl die Ordnungsstrahlen sind. Durch das Collineationscentrum und

die Collineationsaxe sind also je zwei homologe Punkte oder Strahlen der Systeme harmonisch getrennt.

Zwei collineare Systeme Σ und Σ_1, welche in derselben Ebene liegen, haben involutorische Lage, sobald irgend zwei Punkten AB_1 und CD_1 (Fig. 16) zwei andere Punkte A_1B und C_1D, die mit jenen ein Viereck bilden, in doppelter Weise entsprechen. Nämlich die Gerade $\overline{AB}$ entspricht der Geraden $\overline{A_1B_1}$, d. h. sich selbst; und da in ihr die Punkte AB_1 und A_1B einander doppelt entsprechen, so sind ihre sämmtlichen Punkte involutorisch gepaart (I. Abth. Seite 118). Das Nämliche gilt von der Geraden $\overline{CD}$ oder $\overline{C_1D_1}$. Die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden sich in einem Punkte S, welcher sich selbst entspricht und in jeder der involutorischen Punktreihen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ein Ordnungspunkt ist. Jede beliebige Gerade der Ebene, die nicht durch S geht, schneidet die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in zwei Punkten; ihr entspricht folglich diejenige Gerade doppelt, welche die zugeordneten beiden Punkte von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit einander verbindet. Und je zwei Punkte der Systeme müssen einander doppelt entsprechen, weil sie als Schnittpunkte von Geraden angesehen werden können, die einander doppelt entsprechen. Der Schnittpunkt S von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist das Involutionscentrum, und die Gerade u, auf welcher die übrigen Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ sich paarweise schneiden, ist die Involutionsaxe der Systeme.

Betrachten wir die involutorisch liegenden Systeme als ein einziges System, dessen Punkte und Strahlen paarweise einander zugeordnet sind, so soll dasselbe ein „involutorisches ebenes System“ genannt werden. Die soeben gewonnenen Ergebnisse lassen sich dann wie folgt zusammenstellen:

„In einem involutorischen ebenen Systeme liegen je zwei „einander zugeordnete Punkte mit dem Involutionscentrum in „einer Geraden und sind durch dieses und die Involutionsaxe „harmonisch getrennt; je zwei einander zugeordnete Strahlen „schneiden sich auf der Involutionsaxe, und sind durch diese „und das Involutionscentrum harmonisch getrennt. Um die „Elemente eines ebenen Systems involutorisch zu paaren, kann „man irgend zwei Punkten P und Q zwei beliebige andere „P_1 und Q_1 zuordnen, welche mit P und Q ein Viereck bilden; „oder man kann das Involutionscentrum S und die Involutions-„axe u willkürlich in der Ebene annehmen.“

Jede Curve KAL, welche durch zwei Punkte K und L der Involutionsaxe begrenzt ist, bildet mit der ihr zugeordneten Curve KA_1L eine „involutorische“ Curve. Ebenso erhalten wir eine involutorische Curve, wenn wir zu einer Curve SAK oder auch PAP_1, welche entweder vom Involutionscentrum S und einem Punkte K der Involutionsaxe, oder auch von zwei einander zugeordneten Punkten P und P_1 begrenzt ist, die zugeordnete Curve SA_1K oder P_1A_1P hinzufügen. Ein beliebiger Kegelschnitt z. B. erscheint als involutorische Curve, wenn ein beliebiger innerhalb oder ausserhalb desselben gelegener Punkt S als Involutionscentrum und dessen Polare u als Involutionsaxe angenommen wird. Der unendlich fernen Geraden ist, beiläufig bemerkt, eine zu u parallele Gerade g zugeordnet, welche den Abstand von S und u halbirt. Der Kegelschnitt ist also eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem er mit der Geraden g zwei Punkte M und N, oder einen Punkt P oder keinen Punkt gemein hat; und im ersten Fall sind die Asymptoten zu $\overline{SM}$ und $\overline{SN}$ parallel, im zweiten ist $\overline{SP}$ ein Durchmesser der Parabel. Hiedurch ist sehr einfach die Aufgabe gelöst:

> „Zu entscheiden, ob ein Kegelschnitt, von welchem nur ein „begrenztes Stück gegeben ist, eine Hyperbel, Parabel oder „Ellipse ist.“

Ein involutorisches ebenes System wird aus jedem nicht in ihm gelegenen Punkte durch einen involutorischen Strahlenbündel projicirt. Die „Involutions-Ebene“ dieses Bündels geht durch die Involutionsaxe u des ebenen Systems, und die „Involutionsaxe“ des Bündels geht durch das Involutionscentrum S des Systems.

Zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 haben involutorische Lage, wenn zwei ebene Systeme α und α_1 derselben, die nicht auf einander liegen, einander doppelt entsprechen, sodass jedem Elemente des einen ein Element des anderen doppelt entspricht. Denn jeder beliebigen Ebene, welche die beiden ebenen Systeme α und α_1 in den Geraden g und l schneidet, entspricht alsdann diejenige Ebene doppelt, welche die zugeordneten Geraden g_1 und l_1 der resp. Ebenen α_1 und α mit einander verbindet; und da jeder Punkt oder Strahl des Raumes als Schnitt von drei oder zwei solchen Ebenen betrachtet werden kann, so entspricht ihm der Schnittpunkt oder die Schnittlinie der zugeordneten Ebenen in doppelter Weise. Weil somit jedem Elemente ein anderes doppelt entspricht, so können wir die involutorisch

liegenden räumlichen Systeme als ein einziges „involutorisches“ System auffassen, dessen Elemente paarweise einander zugeordnet sind.

Jeder Strahl, welcher zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen Systems mit einander verbindet, oder in welchem zwei einander zugeordnete Ebenen sich schneiden, fällt mit dem ihm entsprechenden Strahle zusammen, ist also sich selbst zugeordnet. Dieses gilt auch von der Geraden s, in welcher die einander zugeordneten Ebenen α und α_1 sich schneiden. Wir erhalten nun zwei wesentlich verschiedene Arten involutorischer Systeme, je nachdem in der Geraden s jeder Punkt mit seinem zugeordneten zusammenfällt oder nicht.

Im ersteren Falle haben die ebenen Systeme α und α_1 die Punktreihe s entsprechend gemein; sie liegen folglich perspectivisch, und erzeugen einen Strahlenbündel S, dessen sämmtliche Strahlen und Ebenen sich selbst zugeordnet sind, weil sie je zwei einander zugeordnete Elemente von α und α_1 mit einander verbinden. Die collinearen räumlichen Systeme Σ und Σ_1 haben den Strahlenbündel S und folglich noch ein ebenes Systems Υ entsprechend gemein, liegen also perspectivisch; in dem von ihnen gebildeten involutorischen System ist somit ebenfalls jedes Element der Ebene Υ sich selbst zugeordnet. Ein involutorisches System dieser Art wird ein „perspectivisch-involutorisches“ genannt; und der Punkt S, mit welchem je zwei zugeordnete Punkte des Systems in einer Geraden und je zwei zugeordnete Gerade in einer Ebene liegen, heisst das „Involutionscentrum“, die Ebene Υ dagegen, auf welcher je zwei einander zugeordnete Strahlen oder Ebenen sich schneiden, heisst die „Involutionsebene“ des Systems. Wir können die Haupt-Eigenschaften dieser Art von involutorischen Systemen wie folgt zusammenfassen:

„Im perspectivisch-involutorischen Systeme ist jede durch „das Involutionscentrum S gehende Gerade oder Ebene und „jeder in der Involutionsebene Υ liegende Punkt oder Strahl „sich selbst zugeordnet. Jede durch S gehende Ebene ist der „Träger eines involutorischen ebenen Systems, dessen Involutionscentrum der Punkt S ist, und welches von Υ in seiner „Involutionsaxe geschnitten wird; ebenso ist jeder auf Υ liegende „Punkt der Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbündels, „dessen Involutionsebene Υ ist und dessen Involutionsaxe durch „S geht. Hieraus folgt, dass je zwei einander zugeordnete „Punkte, Strahlen oder Ebenen durch das Involutionscentrum

„S und die Involutionsebene Υ harmonisch getrennt sind. Um „die Elemente des Raumes involutorisch zu paaren, kann man „das Involutionscentrum S und die Involutionsebene Υ willkürlich annehmen, oder auch S und zwei einander zugeordnete „Ebenen α und α_1, oder Υ und zwei einander zugeordnete „Punkte A und A_1."

Jede gewundene Curve, welche entweder von zwei Punkten K und L der Involutionsebene, oder von zwei einander zugeordneten Punkten A und A_1, oder endlich vom Involutionscentrum S und einem Punkte K der Involutionsebene begrenzt wird, bildet mit der ihr zugeordneten Curve eine sogenannte „involutorische Raumcurve". Jede Fläche, welche von einer involutorischen oder auch von einer sich selbst zugeordneten Curve begrenzt wird, bildet mit der ihr zugeordneten Fläche eine „involutorische" Fläche. Z. B. eine beliebige Fläche F^2 II. Ordnung erscheint als involutorische Fläche, wenn irgend eine sie nicht berührende Ebene Υ als Involutionsebene, und deren Pol S als Involutionscentrum angenommen wird. Die Fläche F^2 ist ein Hyperboloid oder ein Paraboloid oder endlich ein Ellipsoid, je nachdem sie von der zu Υ parallelen Ebene γ, welche den Abstand von S und Υ halbirt, in einer Curve k^2 geschnitten oder in einem Punkte P berührt oder gar nicht getroffen wird; denn jedem gemeinschaftlichen Punkte G von F^2 und γ ist auf dem Strahle $\overline{SG}$ ein unendlich ferner Punkt der Fläche F^2 zugeordnet, weil γ und die unendlich ferne Ebene einander entsprechen. Im Falle des Hyperboloides ist also die Kegelfläche Sk^2 dem Asymptotenkegel parallel, im Falle des Paraboloides ist $\overline{SP}$ ein Durchmesser desselben.

Wir wollen jetzt die zweite Art von involutorischen räumlichen Systemen untersuchen, das sogenannte „geschaart-involutorische" System. Je zwei einander zugeordnete ebene Systeme α und α_1 desselben haben ihre Schnittlinie s, nicht aber alle Punkte derselben entsprechend gemein; vielmehr sind die Punkte von s paarweise einander zugeordnet, also involutorisch gepaart. Die Verbindungslinien homologer Punkte von α und α_1 sind in dem involutorischen Systeme sich selbst zugeordnet, und bilden (Seite 80) ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. Da durch einen beliebigen Punkt des Raumes allemal ein sich selbst zugeordneter Strahl dieses Strahlensystems geht, und in jeder Ebene ein solcher Strahl liegt, so ergiebt sich:

„Im geschaart-involutorischen System sind die Verbindungs-„linien zugeordneter Punkte und die Schnittlinien zugeordneter „Ebenen sich selbst zugeordnet und bilden ein Strahlensystem „erster Ordnung und erster Classe.“

Wir wollen diese sich selbst zugeordneten Geraden die „Leitstrahlen“ des geschaart-involutorischen Systems nennen. Jeder dieser Leitstrahlen ist der Träger einer involutorischen Punktreihe und eines involutorischen Ebenenbüschels, deren Elemente in dem involutorischen Systeme paarweise einander zugeordnet sind. Durch die Ordnungspunkte der involutorischen Punktreihe gehen, und in den Ordnungsebenen des Ebenenbüschels liegen die beiden zu einander windschiefen Axen u, v des Leitstrahlen-Systems (Seite 81). Durch diese reellen oder imaginären Axen u, v, welche die „Involutionsaxen“ des geschaart-involutorischen Systems genannt werden, sind je zwei einander zugeordnete Punkte, Strahlen oder Ebenen des Systems harmonisch getrennt. Auf den beiden Involutionsaxen liegen alle sich selbst zugeordneten Punkte, und durch sie gehen alle sich selbst zugeordneten Ebenen des involutorischen Systems; alle Leitstrahlen des Systems werden von ihnen geschnitten. Wenn zwei Leitstrahlen oder zwei einander zugeordnete Strahlen a, b sich schneiden, so liegt ihr Schnittpunkt $\dot{a}b$ auf einer der beiden Involutionsaxen und ihre Ebene $\overline{ab}$ geht durch die andere; die beiden Axen sind in diesem Falle reell. In jeder durch eine der Axen gehenden reellen Ebene ist ein involutorisches System enthalten, dessen Centrum auf der anderen Axe liegt und welches dem geschaart-involutorischen System angehört; ebenso ist jeder auf einer der Axen liegende, reelle Punkt das Centrum eines in dem System enthaltenen involutorischen Strahlenbündels, dessen Involutionsebene durch die andere Axe geht.

Um ein geschaart-involutorisches System zu bestimmen, kann man die beiden zu einander windschiefen Involutionsaxen u, v willkürlich annehmen. Eine Fläche zweiter Ordnung F^2, in Bezug auf welche u die Polare von v ist, erscheint als involutorische Fläche dieses Systems, indem je zwei Punkte derselben, deren Verbindungslinie die Axen u und v schneidet, durch u und v harmonisch getrennt sind. Ist die Fläche F^2 geradlinig, so sind auch ihre Geraden in dem involutorischen Systeme paarweise einander zugeordnet und durch die Axen u, v harmonisch getrennt; die Strahlen ihrer beiden Regelschaaren sind involutorisch ge-

paart, und werden von einer beliebig durch u (oder v) gelegten Ebene in den Punktenpaaren einer involutorischen Curve II. Ordnung geschnitten, deren Involutionsaxe jene Axe u (resp. v) ist und deren Involutionscentrum auf der anderen Axe v (resp. u) liegt.

Durch ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, dessen Axen entweder imaginär sind oder reell und von einander verschieden, ist ein geschaart-involutorisches System bestimmt (Seite 83), dessen Leitstrahlen das Strahlensystem bilden. Je zwei einander zugeordnete Punkte oder Ebenen dieses involutorischen Systems sind conjugirt in Bezug auf alle in dem Strahlensystem enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung. Jede dieser Regelflächen ist in dem involutorischen Systeme sich selbst zugeordnet; und zwar besteht die eine ihrer Regelschaaren aus Leitstrahlen des Systems, die andere dagegen ist eine in dem System enthaltene involutorische Regelschaar.

„Durch eine involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots$
„ist ein geschaart-involutorisches System bestimmt, in welchem
„die involutorische Regelschaar enthalten und jeder Leitstrahl
„derselben sich selbst zugeordnet ist.“

Sind nämlich p, q, r drei beliebige Leitstrahlen der Regelschaar, so kann man zwei räumliche Systeme collinear so auf einander beziehen, dass den Geraden a, b, a_1, p, q, r des einen die resp. Geraden a_1, b_1, a, p, q, r des anderen entsprechen (Seite 26); diese beiden collinearen Systeme liegen involutorisch, weil ihre Punkte, und Ebenen paarweise, wie ap und $a_1 p$, einander doppelt entsprechen, und sie bilden nicht ein perspectivisch-, sondern ein geschaart-involutorisches System, weil die einander zugeordneten Strahlen a, a_1 sich nicht schneiden. Dem Schnittpunkte S der Ebenen ap, bq, cr, welcher als ein beliebiger Punkt des Raumes angesehen werden kann, ist der Schnittpunkt S_1 der Ebenen $a_1 p$, $b_1 q$, $c_1 r$ zugeordnet, und $S S_1$ ist der durch S gehende Leitstrahl des involutorischen Systems. Die reellen oder imaginären Ordnungsstrahlen der involutorischen Regelschaar bilden die Axen dieses Systems.

Zwei involutorische Regelschaaren $a a_1 . b b_1 . c c_1 \ldots$ und $p p_1 . q q_1 . r r_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der anderen ist, bestimmen ebenfalls ein geschaart-involutorisches System, in welchem sie enthalten sind. Man erhält dasselbe, indem man zwei Räume collinear so auf einander bezieht, dass den Geraden

a, a_1, b, p, p_1, q des einen die resp. Geraden a_1, a, b_1, p_1, p, q_1 des anderen entsprechen. Die Punkte oder Ebenen ap und a_1p_1 nämlich entsprechen einander in doppelter Weise; dem Schnittpunkte der Ebenen ap, bq, cr ist derjenige der Ebenen a_1p_1, b_1q_1, c_1r_1 zugeordnet, u. s. w. Hat die eine der beiden Regelschaaren imaginäre, die andere zwei reelle Ordnungsstrahlen m, n, so sind die Axen des involutorischen Systems imaginär; denn kein reeller Punkt und keine reelle Ebene der Leitstrahlen m, n ist in diesem Falle sich selbst zugeordnet.

Achtzehnter Vortrag.

Strahlencomplexe, welche von collinearen räumlichen Systemen erzeugt werden.

Wenn zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 weder perspectivisch liegen noch die Strahlen eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen „Strahlencomplex", zu welchem wir jede Schnittlinie von zwei homologen Ebenen α, α_1 der Räume rechnen. Jeder Strahl s dieses Complexes liegt, wenn wir ihn als Element von Σ und α auffassen, mit dem ihm entsprechenden Strahle s_1 von Σ_1 in einer Ebene α_1 und unterscheidet sich dadurch von einem beliebigen Strahle des Raumes. Rechnen wir den Schnittpunkt ss_1 der beiden homologen Strahlen zu Σ_1, so liegt der ihm entsprechende Punkt von Σ auf dem Strahle s, sodass dieser Complexstrahl auch als Verbindungslinie homologer Punkte von Σ und Σ_1 sich darstellt. Also:

„Der von den beiden collinearen Räumen Σ und Σ_1 er-
„zeugte Strahlencomplex besteht sowohl aus den Schnittlinien
„homologer Ebenen, als auch aus den Verbindungslinien homo-
„loger Punkte der Räume, ist demnach sich selbst reciprok;
„er besteht ausserdem aus allen Geraden, welche die ihnen
„entsprechenden Geraden schneiden."

Zwei homologe Strahlenbündel von Σ und Σ_1 erzeugen mit einander das Sehnensystem einer Raumcurve dritter Ordnung,

welche eine „Ordnungscurve“ des Strahlencomplexes heissen soll, weil alle ihre Sehnen dem Complex angehören. Diese Curve kann in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in drei Gerade zerfallen, und muss zerfallen, wenn die Räume Σ und Σ_1 einen Ebenenbüschel entsprechend gemein haben. Alle durch die Mittelpunkte S, S_1 der Bündel gehenden Sehnen der Raumcurve liegen auf zwei Kegelflächen zweiter Ordnung. — Zwei homologe ebene Systeme von Σ und Σ_1 erzeugen ferner das zu dem Strahlencomplex gehörige Axensystem eines Ebenenbüschels dritter Ordnung, welchen wir einen „Ordnungs-Ebenenbüschel“ des Complexes nennen wollen; und alle in den beiden ebenen Systemen liegenden Axen dieses Ebenenbüschels bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Also:

Alle durch einen beliebigen Punkt S gehenden Strahlen des Complexes bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung, welche

Alle in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen des Complexes bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welcher

jedoch in zwei Büschel erster Ordnung zerfallen kann. Wegen dieser Haupteigenschaft nennen wir den Strahlencomplex „vom zweiten Grade“, oder „quadratisch“; die in ihm enthaltenen Kegelflächen und Strahlenbüschel heissen „Complexkegel“ und „Complexstrahlenbüschel“.

Die collinearen Räume Σ und Σ_1 können einzelne oder auch unendlich viele Punkte und Ebenen entsprechend gemein haben; dieselben sollen „Hauptpunkte“ und „Hauptebenen“ des von Σ und Σ_1 erzeugten Strahlencomplexes heissen. Für sie erleiden die eben aufgestellten Sätze eine Ausnahme; denn weil jeder Strahl eines Hauptpunktes oder einer Hauptebene von dem ihm entsprechenden Strahle geschnitten wird, so ergiebt sich:

„Jeder durch einen Hauptpunkt gehende oder in einer „Hauptebene liegende Strahl gehört zu dem Strahlencomplexe; „jeder Complexkegel und jede Ordnungscurve des Complexes „geht deshalb durch alle Hauptpunkte, jeder Ordnungs-Ebenen-„büschel geht durch alle Hauptebenen des Complexes.“

Weil die collinearen ebenen Systeme von Σ und Σ_1, welche in einer Hauptebene aufeinander liegen, mindestens einen Punkt entsprechend gemein haben (Seite 126), so muss in jeder Hauptebene mindestens ein Hauptpunkt liegen und ebenso durch jeden Hauptpunkt mindestens eine Hauptebene gehen.

„Wenn ein Strahlenbüschel S erster Ordnung mehr als zwei „Strahlen des Complexes enthält, so besteht er aus lauter „Complexstrahlen und sein Mittelpunkt liegt in einer Haupt-„ebene, seine Ebene aber geht durch einen Hauptpunkt des „Complexes.“

Wenn nämlich dem Strahlenbüschel S von Σ der Büschel S_1 von Σ_1 entspricht, so müssen in dem genannten Falle diese beiden Büschel entweder concentrisch oder in einer Ebene oder perspectivisch liegen, sodass wirklich jeder Strahl von S den entsprechenden Strahl von S_1 schneidet. In dem ersten Falle ist der Mittelpunkt des Büschels ein Hauptpunkt, in dem zweiten ist seine Ebene eine Hauptebene; der letzte Theil des Satzes ist also nur noch für den dritten Fall zu beweisen, in welchem die Büschel S und S_1 weder concentrisch noch in einer Ebene, wohl aber perspectivisch liegen. Nun entspricht aber dem Strahle $\overline{SS_1}$ von Σ ein durch S_1 gehender Strahl von Σ_1, welcher mit $\overline{SS_1}$ in einer Hauptebene liegt; denn die Verbindungs-Ebene dieser beiden homologen Strahlen enthält noch zwei andere, den beiden Büscheln angehörige homologe Strahlen, sodass in ihr zwei Strahlen von Σ und zugleich die entsprechenden beiden Strahlen von Σ_1 liegen. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass die Gerade von Σ, in welcher die Ebenen der beiden perspectivischen Büschel sich schneiden, mit der ihr entsprechenden Geraden einen Hauptpunkt gemein hat.

Wir nennen jeden Punkt, dessen Complexkegel in zwei gewöhnliche Strahlenbüschel zerfällt, einen „singulären“ Punkt, und jede Ebene, deren Complexstrahlenbüschel aus zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung besteht, eine „singuläre“ Ebene des Complexes; dann folgt aus dem Vorhergehenden der Satz:

„Der Ort aller singulären Punkte des Complexes wird von „den Hauptebenen, und der Ort aller singulären Ebenen wird „von den Hauptpunkten gebildet.“

Damit nicht alle Complexkegel und alle Complexstrahlenbüschel in je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallen, wollen wir von jetzt an voraussetzen, dass die collinearen Räume Σ und Σ_1 weder einen Ebenenbüschel noch eine Punktreihe entsprechend gemein haben. Alsdann giebt es nur einzelne, und zwar höchstens vier Hauptpunkte und Hauptebenen des Strahlencomplexes. Wenn vier reelle Hauptpunkte existiren, so bilden dieselben ein Tetraeder, dessen Flächen die vier Hauptebenen des Complexes sind. Bezieht man zwei Räume collinear auf einander, sodass sie die Eck-

punkte A, B, C, D eines Tetreaders entsprechend gemein haben und dass zwei beliebige Punkte E, E_1, die ausserhalb der Tetraederflächen und mit keiner Tetraederkante in einer Ebene liegen, einander entsprechen, so erzeugen die beiden Räume einen „tetraedralen" Strahlencomplex, von welchem $ABCD$ das „Haupttetraeder" und $\overline{EE_1}$ ein beliebiger Strahl ist.

Sind α, α_1 und β, β_1 zwei beliebige Paare homologer Ebenen von Σ und Σ_1, deren Schnittlinien also irgend zwei Complexstrahlen a und b sind, so sind $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\alpha_1\beta_1}$ die Axen von zwei homologen Ebenenbüscheln der collinearen Räume; diese Ebenenbüschel aber erzeugen eine „in dem Strahlencomplex enthaltene" Regel- oder Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch a, b und alle Hauptpunkte geht. Also:

„Zwei beliebige Complexstrahlen a, b können allemal durch „eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine „Schaar von Complexstrahlen sowie alle Hauptpunkte enthält."

Ebenso geht durch a und b eine in dem Complexe enthaltene Fläche zweiter Classe, welche alle Hauptebenen berührt. — Jene durch a, b und alle Hauptpunkte gehende Fläche zweiter Ordnung kann durch zwei projectivische Ebenenbüschel a, b erzeugt werden, von welchen in jedem Hauptpunkte zwei homologe Ebenen sich schneiden. Für den Fall eines reellen Haupttetraeders ergeben sich somit die folgenden Fundamental-Eigenschaften*) des tetraedalen Complexes:

Die Eckpunkte des Haupttetraeders werden aus je zwei Strahlen des Complexes durch projectivische Ebenenbüschel projicirt.

Die Flächen des Haupttetraeders werden von je zwei Strahlen des Complexes in projectivischen Punktreihen geschnitten.

Durch diese Sätze erhält die Aufgabe 15 im Anhange der „Systemat. Entwickelung . . ." eine andere Auflösung, als Jacob Steiner erwartete.

„Ein tetraedraler Complex ist völlig bestimmt, sobald von „demselben das Haupttetraeder $ABCD$ und ein Strahl s ge- „geben ist, welcher keine Kante des Tetraeders schneidet."

Zunächst nämlich ist der Complexkegel eines jeden auf s gelegenen Punktes S durch seine fünf Strahlen s, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ und $\overline{SD}$

*) Dieselben werden zuerst von Herrn H. Müller ausgesprochen in den „Mathemat. Annalen", Bd. I.

bestimmt; derselbe zerfällt, wenn S in einer Hauptebene, etwa in $\overline{BCD}$ liegt, in zwei Strahlenbüschel, von welchen der eine in $\overline{BCD}$ und der andere in der Ebene $\overline{As}$ liegt. In der That enthält der letztere Büschel drei Strahlen des Complexes, nämlich $\overline{SA}$, s und den in der Hauptebene $\overline{BCD}$ liegenden Strahl, und besteht folglich aus lauter Complexstrahlen. Also:

„Alle Complexstrahlen, welche eine Fläche des Haupt-„tetraeders in einem beliebigen Punkte schneiden, bilden einen „Strahlenbüschel, dessen Ebene durch den gegenüberliegenden „Hauptpunkt geht. Zu jeder Geraden a, welche durch einen „Hauptpunkt A geht und in einer Hauptebene $\overline{ACD}$ liegt, „kann folglich eine Gerade b construirt werden, welche in der „Hauptebene $\overline{BCD}$ liegt und durch den Hauptpunkt B geht, „sodass jeder die Geraden a und b schneidende Strahl dem „Complex angehört."

Auf Grund dieser Sätze, wonach in dem tetraedralen Complexe unendlich viele Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe enthalten sind, kann man von s ausgehend alle übrigen Strahlen des Complexes linear construiren; und da schon früher (Seite 138) gezeigt worden ist, dass ein Complex mit dem Haupttetraeder $ABCD$ und dem Strahle s existirt, so ergiebt sich nunmehr, dass derselbe völlig bestimmt ist. — Beiläufig ergiebt sich noch:

Alle Complexkegel, deren Mittelpunkte mit einem Hauptpunkte A in einer Geraden liegen, haben mit der gegenüberliegenden Hauptebene $\overline{BCD}$ einen und denselben Kegelschnitt gemein.

Alle Complexstrahlenbüschel, deren Ebenen sich auf einer Hauptebene schneiden, werden aus dem gegenüberliegenden Hauptpunkte durch einen und denselben Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

Für jeden durch zwei collineare Räume Σ und Σ_1 erzeugten Strahlencomplex gilt der Satz:

„Drei beliebige Complexstrahlen a, b, c, die nicht auf einer „in dem Complexe enthaltenen Regel- oder Kegelfläche liegen, „bestimmen eine Ordnungscurve des Complexes, von welcher „sie Sehnen, und einen Ordnungs-Ebenenbüschel, von welchem „sie Axen sind."

Nämlich die drei Paare homologer Ebenen von Σ und Σ_1, welche in a, b und c sich schneiden, gehören zu zwei bestimmten homologen Strahlenbündeln von Σ und Σ_1, und diese erzeugen die durch a, b, c bestimmte Ordnungscurve und deren Sehnensystem.

Wenn zwei von den Strahlen a, b, c sich schneiden, so geht die Ordnungscurve durch den Schnittpunkt P; und da alle durch P gehenden Complexstrahlen durch zwei homologe Ebenenbüschel von Σ und Σ_1 erzeugt werden, so ergiebt sich:

„Durch einen Complexstrahl a und einen ausserhalb a „liegenden Punkt P ist eine Ordnungscurve des Complexes „bestimmt, welche durch P geht und a zur Sehne hat. Durch „je zwei Punkte P, P_1 eines Complexstrahles a geht allemal „eine bestimmte Ordnungscurve."

Freilich dürfen die Punkte P, P_1 keine Hauptpunkte sein. — Die unendlich vielen Ordnungscurven, welche dem letzten Satze zufolge auf einem beliebigen Complexkegel P liegen, können paarweise ausser dem Mittelpunkte des Kegels nicht mehr als vier Punkte gemein haben, weil sie sonst zusammenfallen würden (Seite 93); daraus folgt wiederum, dass der Complex höchstens vier Hauptpunkte hat. Zugleich aber ergeben sich verschiedene Arten von Complexen, jenachdem die vier Punkte reell oder paarweise imaginär sind, oder zu zweien oder dreien oder endlich alle vier zusammenfallen.

„Wenn zwei Complexkegel oder überhaupt zwei in dem „Complex enthaltene Flächen zweiter Ordnung sich in einem „Complexstrahle a und einer Raumcurve dritter Ordnung „schneiden, so ist letztere eine Ordnungscurve des Complexes."

Denn diese Raumcurve fällt zusammen mit derjenigen Ordnungscurve, welche durch a und zwei andere auf den beiden Flächen liegenden Complexstrahlen b, c bestimmt ist.

Zwei beliebige Ordnungscurven k^3 und l^3 werden durch zwei Paar homologe Strahlenbündel K, K_1 und L, L_1 von Σ und Σ_1 erzeugt; sie haben deshalb jede Sehne mit einander gemein, in welcher zwei einander entsprechende Ebenen der Büschel $\overline{KL}$ und $\overline{K_1 L_1}$ sich schneiden. Da diese beiden homologen Büschel von Σ und Σ_1 projectivisch sind, so liegen die beiden Ordnungscurven auf einer in dem Complexe enthaltenen Fläche zweiter Ordnung, und:

Die gemeinschaftlichen Sehnen von zwei beliebigen Ordnungscurven des Complexes bilden eine Regelschaar oder eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Die gemeinschaftlichen Axen von zwei beliebigen Ordnungs-Ebenenbüscheln des Complexes bilden eine Regelschaar oder einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

Der Strahlencomplex ist völlig bestimmt, wenn von ihm irgend zwei Ordnungscurven k^3 und l^3 gegeben sind. Verbindet man nämlich k^3 und l^3 mit irgend einer ihrer gemeinschaftlichen Sehnen s durch zwei Flächen zweiter Ordnung, was auf unendlich viele Arten möglich ist, so schneiden sich diese, weil sie in dem Complexe enthalten sind, im Allgemeinen in s und einer von k^3 und l^3 verschiedenen Ordnungscurve. Alle so bestimmten Ordnungscurven nun haben mit einer beliebigen Ebene mindestens je eine Sehne gemein, welche zu dem Complexstrahlenbüschel der Ebene gehört; und da dieser ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung ist, so wird er durch fünf seiner Strahlen bestimmt. Durch k^3 und l^3 sind also alle in einer beliebigen Ebene liegenden und folglich überhaupt alle Complexstrahlen bestimmt.

Wir können nunmehr den folgenden Satz aufstellen, dessen Beweis für den Fall eines reellen Haupttetraeders schon vorhin (Seite 138) geführt worden ist:

Sollen zwei räumliche Systeme collinear auf einander bezogen werden, so dass sie einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, so kann man irgend zwei Punkte P *und* P_1, *die auf einem beliebigen Complexstrahle liegen, oder irgend zwei Ebenen, die sich in einem Complexstrahle schneiden, oder endlich irgend zwei in einer Ebene liegende Complexstrahlen als entsprechende einander zuweisen. Dadurch ist aber zu jedem Elemente des einen räumlichen Systems das entsprechende Element des anderen völlig bestimmt.*

Die Punkte P und P_1, die in den räumlichen Systemen Σ und Σ_1 einander entsprechen sollen, sind die Mittelpunkte von zwei Strahlenbündeln, deren collineare Verwandtschaft durch den gegebenen Strahlencomplex festgestellt wird. Nämlich jeder Complexstrahl von P liegt mit dem entsprechenden des Bündels P_1 in einer Ebene; und die Complexkegel P und P_1, welche den Strahl $\overline{PP_1}$ und also noch eine durch P und P_1 gehende Raumcurve k^3 dritter Ordnung mit einander gemein haben, sind also in der Weise projectivisch auf einander zu beziehen, dass je zwei homologe Strahlen derselben sich auf der Ordnungscurve k^3 schneiden. Dadurch sind zugleich die Strahlenbündel P und P_1 collinear auf einander bezogen, so dass je zwei homologe Ebenen derselben eine Sehne von k^3 mit einander gemein haben.

Sei nun l^3 irgend eine von k^3 verschiedene Ordnungscurve des Strahlencomplexes, und seien Q und Q_1 die noch unbekannten Mittelpunkte der collinearen Strahlenbündel von Σ und Σ_1, durch

welche die sämmtlichen Sehnen der Raumcurve l^3 dritter Ordnung erzeugt werden. Die gemeinschaftlichen Sehnen von k^3 und l^3 bilden entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung, und werden folglich aus P und P_1 durch zwei Ebenenbüschel projicirt. Die Axen dieser Ebenenbüschel sind entweder Leitstrahlen der Regelschaar oder Strahlen der Kegelfläche, und haben nur je einen (von der Spitze der Kegelfläche verschiedenen) Punkt mit der Curve l^3 gemein (Seite 90). Wir müssen diese Punkte als Mittelpunkte der gesuchten Strahlenbündel Q und Q_1 annehmen, so dass $\overline{PQ}$ und $\overline{P_1 Q_1}$ die Axen jener Ebenenbüschel sind. Beziehen wir nämlich die beiden Strahlenbündel, welche diese beiden Punkte Q und Q_1 zu Mittelpunkten haben, collinear so auf einander, dass je zwei homologe Ebenen derselben sich in einer Sehne der Ordnungscurve l^3 schneiden, so entspricht dem gemeinschaftlichen Ebenenbüschel $\overline{PQ}$ der Bündel P und Q der gemeinschaftliche Ebenenbüschel $\overline{P_1 Q_1}$ der Bündel P_1 und Q_1; und dieses ist nothwendig und hinreichend, damit durch die Bündel P und Q von Σ und die ihnen collinearen Bündel P_1 und Q_1 von Σ_1 auch die räumlichen Systeme Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen werden (vergl. Seite 21). Der von Σ und Σ_1 erzeugte Strahlencomplex ist, wie verlangt wird, identisch mit dem gegebenen, weil es mit letzterem alle Sehnen der Ordnungscurven k^3 und l^3 gemein hat.

Beiläufig ergiebt sich aus diesem Beweise:

„Zwei beliebige Raumcurven dritter Ordnung k^3 und l^3, deren „gemeinschaftliche Sehnen eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung bilden, können stets als Ordnungscurven „eines durch sie bestimmten Strahlencomplexes betrachtet „werden."

Werden nicht zwei Punkte P und P_1 eines Complexstrahles, sondern irgend zwei sich schneidende Complexstrahlen s und s_1, oder auch irgend zwei Ebenen π und π_1 eines Complexstrahles als homologe Elemente der collinearen Systeme Σ und Σ_1 angenommen, so können wir diese Fälle sofort auf den zuerst betrachteten zurückführen. Nämlich jedem Punkte P von s entspricht derjenige Punkt P_1 von s_1, welcher mit P durch einen dritten Complexstrahl der Ebene $\overline{s s_1}$ verbunden wird; und weil der in $\overline{s s_1}$ liegende Complexstrahlenbüschel als Theil des Complexes gegeben ist, so kann zu P der entsprechende Punkt P_1 sofort gefunden werden. Ebenso kann zu jedem Complexstrahle s

der Ebene π der entsprechende s_1 von π_1 leicht gefunden werden, da beide sich auf der Geraden $\overline{\pi\pi_1}$ schneiden müssen; dem Schnittpunkte P von zwei Complexstrahlen der Ebene π entspricht aber der Schnittpunkt P_1 der homologen Complexstrahlen von π_1. Da je zwei die Ebenen π und π_1 enthaltende Bündel der collinearen Räume eine durch ihre Mittelpunkte P, P_1 gehende Ordnungscurve erzeugen, von welcher $\overline{\pi\pi_1}$ eine Sehne ist, so ergiebt sich beiläufig:

„Zwei durch einen Complexstrahl a gehende Ebenen werden „von denjenigen Ordnungscurven, welche a zur Sehne haben, „in collinearen Punktsystemen geschnitten."

Construiren wir zu einem räumlichen Systeme Σ alle möglichen collinearen Systeme, welche mit Σ einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, so liegen die sämmtlichen Punkte, welche einem gegebenen Punkte P von Σ entsprechen, auf dem Complexkegel von P, weil jeder derselben mit P durch einen Complexstrahl verbunden wird; die sämmtlichen Ebenen, welche einer gegebenen π von Σ entsprechen, gehen durch die Complexstrahlen der Ebene π; von den Complexstrahlen, welche einem gegebenen Complexstrahle s von Σ entsprechen und also denselben schneiden, bilden alle diejenigen, welche durch einen beliebigen Punkt von s gehen, eine Kegelfläche II. Ordnung, und diejenigen, welche in einer beliebigen Ebene von s liegen, einen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Je zwei dieser zu Σ collinearen räumlichen Systeme sind auch zu einander collinear; sie erzeugen jedoch nur in besonderen Fällen denselben Strahlencomplex mit einander, welchen jedes von ihnen mit Σ erzeugt. Sollen nämlich je zwei der collinearen Systeme Σ, Σ_1 und Σ_2 den gegebenen Strahlencomplex erzeugen, und sind P, P_1, P_2 drei homologe Punkte, π, π_1, π_2 drei homologe Ebenen, und s, s_1, s_2 drei homologe Complexstrahlen von resp. Σ, Σ_1 und Σ_2, so muss Folgendes eintreten: Die homologen Punkte P, P_1, P_2 liegen entweder auf einem und demselben Complexstrahle oder auf einer und derselben Ordnungscurve, weil die Complexkegel P und P_1 die resp. Complexstrahlen $\overline{PP_2}$ und $\overline{P_1P_2}$ enthalten, also beide durch P_2 gehen, und ausserdem den Strahl $\overline{PP_1}$ mit einander gemein haben; ebenso liegen die homologen Ebenen π, π_1, π_2 entweder in einem und demselben Ordnungs-Ebenenbüschel, weil jede ihrer drei Schnittlinien ein Complexstrahl ist, oder sie schneiden sich in einem und demselben Complexstrahle; endlich müssen die homologen Complexstrahlen s, s_1, s_2,

weil jeder von ihnen die beiden anderen schneidet, entweder in einer und derselben Ebene liegen und zwar in dem Complexstrahlenbüschel dieser Ebene, oder sie müssen durch einen und denselben Punkt gehen und folglich einem Complexkegel angehören. Wenn die homologen Ebenen π, π_1, π_2 durch einen Complexstrahl a gehen, so liegen je drei homologe Punkte P, P_1, P_2 derselben auf einer Ordnungscurve k^3, welche a zur Sehne hat, und je drei durch resp. P, P_1, P_2 gehende homologe Ebenen von Σ, Σ_1 und Σ_2 schneiden sich in einer Sehne von k^3; je drei einander entsprechende Complexstrahlen dieser Ebenen aber gehen, weil sie sich schneiden müssen, durch einen und denselben Punkt der Sehne. Also:

Werden zu einem räumlichen Systeme Σ alle diejenigen collinearen Systeme construirt, welche nicht blos mit Σ, sondern auch paarweise mit einander einen gegebenen Strahlencomplex erzeugen, so findet einer der folgenden beiden Fälle Statt:

1) *Entweder bildet jede Ebene von Σ mit allen ihr entsprechenden Ebenen einen Büschel I. Ordnung, dessen Axe ein Complexstrahl ist, und jeder Punkt von Σ bildet mit seinen homologen Punkten eine Ordnungscurve, sowie jeder Complexstrahl mit seinen homologen einen Complexkegel;*
2) *Oder jede Ebene von Σ bildet mit den ihr entsprechenden Ebenen einen Ordnungs-Ebenenbüschel, jeder Punkt von Σ liegt mit allen seinen homologen Punkten auf einem Complexstrahle, und jeder Complexstrahl von Σ bildet mit seinen homologen Strahlen einen Complexstrahlenbüschel.*

Neunzehnter Vortrag.

Büschel von Flächen zweiter Ordnung. Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung.

Werden zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 reciprok auf ein drittes Σ' bezogen, so ist dadurch der von Σ und Σ_1 erzeugte Strahlencomplex projectivisch auf Σ' bezogen, und zwar auf zweifache Art. Nämlich jedem Punkte von Σ' entsprechen

zwei homologe Ebenen von Σ und Σ_1 und damit zugleich der Complexstrahl, in welchem sie sich schneiden; und wenn ein Punkt irgend eine Gerade g' oder Ebene α' in Σ' durchläuft, so beschreibt der ihm entsprechende Complexstrahl eine zu g' projectivische Regelschaar oder Kegelfläche resp. das zu α' projectivische Sehnensystem einer Ordnungscurve des Complexes. Anderseits entsprechen jeder Ebene von Σ' zwei homologe Punkte von Σ und Σ_1 und der sie verbindende Complexstrahl; und wenn die Ebene sich um einen auf ihr liegenden Punkt A' dreht, so beschreibt dieser Strahl das zum Bündel A' projectivische Axensystem eines Ordnungs-Ebenenbüschels des Complexes. Jedem Complexstrahle von Σ und Σ_1 entsprechen in Σ' zwei sich schneidende Strahlen sowie deren Schnittpunkt und deren Verbindungs-Ebene. Der von Σ und Σ_1 erzeugte Strahlencomplex ist, wie man zu sagen pflegt, sowohl auf das Punktsystem Σ' als auch auf das räumliche Ebenensystem Σ' projectivisch „abgebildet“.

Wir wollen nun annehmen, die zu Σ' reciproken räumlichen Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch zu Σ' und bilden mit Σ' zwei gewöhnliche räumliche Polarsysteme. Als Ordnungsflächen der letzteren können wir zwei beliebige Flächen zweiter Ordnung, die weder Kegelflächen sind, noch in Ebenen zerfallen, willkürlich annehmen. Die Sätze des letzten Vortrages werden dadurch anwendbar auf die Flächen zweiter Ordnung und gewinnen an Anschaulichkeit und Bedeutsamkeit. Zunächst ergiebt sich:

„Zwei räumliche Polarsysteme bestimmen im Allgemeinen „einen Strahlencomplex zweiten Grades; derselbe enthält jede „Gerade, deren zwei Polaren sich schneiden. Jedem Punkte „ist ein ihm zweifach conjugirter Complexstrahl zugeordnet, „nämlich die Schnittlinie seiner beiden Polar-Ebenen; ebenso „entspricht jeder Ebene ein ihr zweifach conjugirter Complex„strahl, nämlich die Verbindungslinie ihrer beiden Pole.“

Einem Complexstrahle g' ist hiernach in beiden Polarsystemen sowohl eine Ebene γ als auch ein Punkt G conjugirt; durch G gehen und in γ liegen die beiden Polaren g und g_1 von g'. Suchen wir von g die beiden Polaren, so fällt die eine mit g' zusammen, die andere liegt mit g' in der einen Polar-Ebene von G und schneidet g' in dem einen Pole von γ. Also:

„Der Strahlencomplex ist in jedem der beiden Polarsysteme „sich selbst zugeordnet, indem die Polaren jedes Complex„strahles wiederum Complexstrahlen sind.“

In jedem Hauptpunkte des Strahlencomplexes vereinigen sich die beiden Pole einer Ebene, und letztere ist eine Hauptebene des Complexes, weil in ihr die beiden Polar-Ebenen des Hauptpunktes zusammenfallen. Also:

„Jedem Hauptpunkte des Complexes ist in beiden Polar-„systemen eine bestimmte Hauptebene als Polare zugeordnet.“

Wir schliessen nun wie im letzten Vortrage den speciellen Fall aus, in welchem der Strahlencomplex unendlich viele Hauptpunkte und Hauptebenen hat. Der Complex hat dann höchstens vier reelle Hauptpunkte und vier Hauptebenen, und das von denselben gebildete Haupttetraeder ist ein gemeinschaftliches Poltetraeder der beiden Polarsysteme, indem jeder Eckpunkt von der ihm gegenüberliegenden Fläche der Pol ist. Die soeben gemachte Annahme, dass nur einzelne Hauptpunkte und Hauptebenen vorhanden sein sollen, lässt sich deshalb auch so ausdrücken:

„Die beiden Polarsysteme sollen höchstens ein gemein-„schaftliches Poltetraeder $ABCD$ haben, sodass von keinem „fünften Punkte die Polar-Ebenen zusammenfallen.“

Ist dieses Haupttetraeder reell, so werden seine Eckpunkte aus je zwei Complexstrahlen durch projectivische Ebenenbüschel projicirt, und seine Flächen werden von je zwei Complexstrahlen in projectivischen Punktreihen geschnitten (Seite 138).

Den Punkten einer beliebigen Ebene $\varkappa$ sind in den beiden Polarsystemen die Sehnen einer Ordnungscurve k^3 des Complexes conjugirt, welche durch alle Hauptpunkte geht. Umgekehrt sind den Sehnen und Punkten einer beliebigen Ordnungscurve die Punkte und Complexstrahlen einer Ebene zweifach conjugirt.

Den Ebenen eines beliebigen Punktes sind in den beiden Polarsystemen die Axen eines Ordnungs-Ebenenbüschels des Complexes conjugirt. Umgekehrt sind den Axen und Ebenen eines beliebigen Ordnungs-Ebenenbüschels die Ebenen und Complexstrahlen eines Punktes zweifach conjugirt.

Wenn nämlich ein Punkt die Ebene $\varkappa$ durchläuft, so beschreiben seine beiden Polar-Ebenen zwei collineare Strahlenbündel, und diese erzeugen die Ordnungscurve k^3 und ihr Sehnensystem. Ist umgekehrt k^3 gegeben, so bestimme man zu drei beliebigen Sehnen a, b, c von k^3 die ihnen zweifach conjugirten Punkte und verbinde letztere durch eine Ebene; den Punkten dieser Ebene sind dann die Sehnen einer Ordnungscurve conjugirt, welche mit k^3 die Sehnen a, b, c gemein hat und folglich mit k^3 identisch ist (Seite 139).

Der Strahlencomplex wird erzeugt durch zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1, welche zu einem dritten Σ' reciprok sind und involutorisch liegen, sodass sie mit Σ' die beiden Polarsysteme bilden. Construiren wir jetzt ein viertes räumliches System Σ_2, welches zu Σ und Σ_1 collinear ist und mit jedem dieser Systeme den gegebenen Complex erzeugt, so müssen (Seite 144) entweder je drei homologe Ebenen von Σ, Σ_1 und Σ_2 in einem und demselben Complexstrahle sich schneiden, oder je drei homologe Punkte derselben auf einem und demselben Complexstrahle liegen. In beiden Fällen lässt sich beweisen, dass auch Σ_2 zu dem ihm reciproken Systeme Σ' involutorische Lage hat und mit letzterem ein Polarsystem bildet; und zwar leuchtet dieses von selbst ein, wenn der Complex ein reelles Haupttetraeder besitzt, indem dieses auch von dem letzteren Polarsystem ein Poltetraeder bildet.

Im ersteren der genannten Fälle entsprechen jedem Punkte P von Σ' drei Ebenen π, π_1 und π_2 in resp. Σ, Σ_1 und Σ_2, welche sich in einem und demselben Complexstrahle schneiden; und jedem Punkte R des letzteren entsprechen drei Ebenen ρ, ρ_1 und ρ_2, welche sich in einem durch P gehenden Complexstrahle schneiden müssen, weil P und R in den gegebenen beiden Polarsystemen conjugirt sind. Da also auch in Σ_2 jedem der Punkte P und R von Σ' eine durch den anderen gehende Ebene entspricht, so liegt die Punktreihe $\overline{PR}$ von Σ' involutorisch zu dem ihr entsprechenden Ebenenbüschel $\pi_2 \rho_2$ von Σ_2. Ist in Σ' ein ebenes System ε gegeben, und entspricht demselben in Σ_2 ein Strahlenbündel E_2, dessen Mittelpunkt nicht in ε liegt, so können auf diese Weise in ε unendlich viele Punktreihen angegeben werden, welche zu den entsprechenden Ebenenbüscheln von E_2 involutorische Lage haben; woraus folgt (Seite 61), dass ε und E_2 involutorisch liegen. Und weil dieses für jedes solche ebene System von Σ' und den entsprechenden Strahlenbündel von Σ_2 gilt, so haben auch Σ' und Σ_2 involutorische Lage, wie behauptet wurde. — Für den zweiten der beiden genannten Fälle, welcher aus dem ersteren auch mittelst des Gesetzes der Reciprocität sich ergiebt, kann der directe Beweis auf analoge Weise geführt werden.

Mit Berücksichtigung der letzten Sätze des achtzehnten Vortrages (Seite 144) ergiebt sich hieraus Folgendes:

Werden zu zwei gegebenen räumlichen Polarsystemen alle diejenigen Polarsysteme construirt, von denen jedes mit einem der übrigen oder der gegebenen denselben Strahlencomplex, wie

die beiden gegebenen bestimmt, so tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:

1) *Entweder schneiden sich die Polar-Ebenen jedes beliebigen Punktes in einem und demselben Complexstrahle, die Pole jeder beliebigen Ebene liegen im Allgemeinen auf einer Raumcurve dritter Ordnung, deren Sehnensystem dem Complexe angehört, und die Polaren jedes Complexstrahles bilden einen Complexkegel II. Ordnung;*
2) *Oder die Polar-Ebenen jedes Punktes bilden im Allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, dessen Axensystem dem Complexe angehört, die Pole jeder Ebene liegen auf einem und demselben Complexstrahle, und die Polaren jedes Complexstrahles bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung des Complexes.*

Die Gesammtheit aller Ordnungsflächen der Polarsysteme nennen wir im ersteren Falle einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung F^2 oder kürzer einen „F^2-Büschel“, und im letzteren Falle eine Schaar von Flächen zweiter Classe Φ^2 oder eine „Φ^2-Schaar“. Weil in beiden Fällen durch zwei Polarsysteme alle übrigen bestimmt sind, so ergiebt sich:

„Durch zwei Flächen zweiter Ordnung und Classe ist ein „sie enthaltender F^2-Büschel und zugleich eine durch sie „gehende Φ^2-Schaar bestimmt.“

Da im ersteren Falle die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P einen Ebenenbüschel I. Ordnung bilden, von welchem im Allgemeinen eine einzige Ebene π durch P geht, so liegt P auf der Ordnungsfläche desjenigen Polarsystems, in welchem P der Pol von π ist; wenn jedoch P auf der Axe jenes Ebenenbüschels und folglich auch auf jeder seiner Polar-Ebenen liegt, so geht die Ordnungsfläche eines jeden der Polarsysteme durch P hindurch. Die Pole einer Ebene ε liegen im Allgemeinen auf einer Raumcurve dritter Ordnung; und weil diese höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt mit ε gemein hat, so giebt es unter den Polarsystemen mindestens eines und höchstens drei, deren Ordnungsflächen die Ebene ε, und zwar in jenen Punkten, berühren. Also:

Von einem F^2-Büschel geht durch einen beliebigen Punkt P nur eine Fläche, falls nicht P auf jeder Fläche des Büschels

Von einer Φ^2-Schaar wird nur eine einzige Fläche von einer beliebigen Ebene π berührt, falls nicht jede Fläche der Schaar

liegt. Eine beliebige Ebene ε wird von höchstens drei Flächen des Büschels und von mindestens einer derselben berührt.

von π berührt wird. Durch einen beliebigen Punkt gehen höchstens drei Flächen der Schaar, und mindestens eine.

Wenn zwei Flächen II. Ordnung sich schneiden, so geht hiernach jede Fläche des durch sie bestimmten F^2-Büschels durch die Schnittcurve hindurch. Diese Schnittcurve heisst die „Grundcurve, Knotenlinie oder Basis“ des F^2-Büschels; sie ist im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung, welche mit keiner Ebene mehr als vier, und mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat. Nämlich die beiden Flächen II. Ordnung werden von einer Ebene in zwei Curven II. Ordnung geschnitten, welche mit einander höchstens vier Punkte gemein haben, wenn sie nicht völlig zusammenfallen. Die Curve vierter Ordnung kann, wie wir gesehen haben (Seite 32 und 110), auch in zwei Kegelschnitte, oder in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, oder in lauter Gerade zerfallen; wir wollen hier auf diese speciellen Fälle nicht näher eingehen. — Die gemeinschaftlichen Berührungs-Ebenen von zwei Flächen II. Ordnung bilden im Allgemeinen einen Ebenenbüschel vierter Ordnung, von welchem durch keinen Punkt P mehr als vier Ebenen hindurchgehen. Nämlich die beiden Kegelflächen II. Ordnung, welche aus dem Punkte P den gegebenen Flächen II. Ordnung umschrieben werden können, haben höchstens vier gemeinschaftliche Berührungs Ebenen, wenn sie nicht völlig zusammenfallen. — Ueber diese Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung giebt uns der vorige Doppelsatz folgende Aufschlüsse:

Durch eine Raumcurve k^4 vierter Ordnung, in welcher zwei Flächen II. Ordnung F^2 und F_1^2 sich schneiden, und durch einen beliebigen ausserhalb k^4 gelegenen Punkt P kann eine Fläche II. Ordnung F_2^2 gelegt werden. Dieselbe gehört zu dem durch F^2 und F_1^2 bestimmten F^2-Büschel.

Einem Ebenenbüschel vierter Ordnung, welcher zwei Flächen II. Classe Φ^2 und Φ_1^2 umschrieben ist, kann eine dritte Fläche II. Classe Φ_2^2 eingeschrieben werden, welche eine beliebig gegebene Ebene berührt. Die Fläche Φ_2^2 gehört zu der durch Φ^2 und Φ_1^2 bestimmten Φ^2-Schaar.

Wählen wir links den Punkt P so, dass er mit zwei Punkten der Curve k^4 in einer Geraden g liegt, so wird die Fläche F_2^2 eine geradlinige, weil sie drei und folglich alle Punkte von g enthält. Jede durch g gelegte Ebene, welche von k^4 in zwei neuen Punkten

Q und R geschnitten wird, hat mit F_2^2 ausser g die Gerade $\overline{QR}$ gemein; denn diese Gerade hat mit F_2^2 die Punkte Q und R und noch einen Punkt von g gemein und liegt deshalb ganz auf F_2^2. Also:

„Alle Sehnen $\overline{QR}$ der Raumcurve vierter Ordnung, welche von „einer gegebenen Sehne g ausserhalb der Curve geschnitten „werden, bilden eine Regelschaar oder eine Kegelfläche „II. Ordnung.“

Liegen jene Sehnen auf einer Kegelfläche II. Ordnung, so ist der Mittelpunkt A derselben ein Hauptpunkt des Strahlencomplexes; denn auf jeder Sehne giebt es einen Punkt, welcher von A durch zwei Punkte der Raumcurve vierter Ordnung, und folglich durch jede der Flächen F^2 und F_1^2 harmonisch getrennt ist, und alle diese vierten harmonischen Punkte liegen in der Polar-Ebene des Punktes A bezüglich der beiden Flächen F^2 und F_1^2. Umgekehrt:

Wenn zwei Flächen II. Ordnung, die ein gemeinschaftliches Pol-Tetraeder $A\,B\,C\,D$ besitzen,

sich in einer Raumcurve k^4 vierter Ordnung schneiden, so wird diese aus jedem Eckpunkte des Pol-Tetraeders durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt.	einem Ebenenbüschel vierter Ordnung eingeschrieben sind, so wird dieser von jeder Fläche des Pol-Tetraeders in einem Strahlenbüschel II. Ordnung geschnitten.

Nämlich jede Gerade, welche den Eckpunkt A mit irgend einem Punkte Q der Curve k^4 verbindet, enthält noch einen zweiten Punkt R der Curve; und zwar sind Q und R harmonisch getrennt durch den Punkt A und seine Polar-Ebene $\overline{BCD}$. Eine durch A gehende Sehne g wird also von jeder anderen Sehne, welche mit g in einer Ebene liegt, aber keinen Punkt der Curve k^4 mit g gemein hat, im Punkte A geschnitten.

Zwei Raumcurven vierter Ordnung, k^4 und l^4, haben höchstens acht Punkte mit einander gemein.	Zwei Ebenenbüschel vierter Ordnung haben höchstens acht Ebenen mit einander gemein.

Seien P, Q und R irgend drei gemeinschaftliche Punkte der Raumcurven k^4 und l^4, dann kann die gemeinschaftliche Sehne $\overline{PQ}$ mit den beiden Curven durch zwei geradlinige Flächen II. Ordnung verbunden werden, welche ausser der Sehne $\overline{PQ}$ nur noch eine Raumcurve dritter Ordnung gemein haben können. Diese Raumcurve dritter Ordnung, von welcher $\overline{PQ}$ eine Sehne ist (Seite 92), muss durch R und jeden anderen, von P und Q ver-

schiedenen, gemeinschaftlichen Punkt von k^4 und l^4 gehen. Nun liefert uns aber die Sehne $\overline{PR}$ auf ganz dieselbe Weise eine zweite Raumcurve dritter Ordnung, welche ebenfalls durch alle, von P, Q und R verschiedenen Schnittpunkte der Curven k^4 und l^4 geht. Zwei Raumcurven dritter Ordnung, die nicht identisch sind, haben aber höchstens fünf Punkte mit einander gemein; also giebt es ausser P, Q und R noch höchstens fünf Punkte, welche auf beiden Raumcurven vierter Ordnung liegen. Zugleich folgt aus dem Beweise:

„Wenn zwei Raumcurven vierter Ordnung acht gemeinschaft-
„liche Punkte besitzen, und man verbindet sechs derselben durch
„eine Raumcurve dritter Ordnung, und die beiden letzten durch
„eine Gerade, so ist diese Gerade eine Sehne der Raumcurve
„dritter Ordnung.“*)

Wenn in dem Beweise des vorhergehenden Satzes statt der Raumcurve vierter Ordnung l^4 eine Raumcurve dritter Ordnung nebst einer ihrer Sehnen angenommen wird, so ergiebt sich auf demselben Wege:

„Eine Raumcurve dritter Ordnung hat mit einer Raumcurve
„vierter Ordnung höchstens sechs Punkte gemein“,

wovon übrigens einer ein Doppelpunkt der Raumcurve vierter Ordnung sein kann.

Eine Raumcurve dritter Ordnung wird daher von einer nicht durch sie hindurchgehenden Fläche II. Ordnung in höchstens sechs Punkten geschnitten.

Drei Flächen II. Ordnung, welche weder eine Gerade, noch eine Curve II., III. oder IV. Ordnung mit einander gemein haben, besitzen höchstens acht gemeinschaftliche Punkte.

Drei Flächen II. Classe, deren gemeinschaftliche Berührungsebenen weder einen Büschel I., II., III. noch IV. Ordnung bilden, besitzen höchstens acht gemeinschaftliche Berührungs-Ebenen.

Denn wenn eine der drei Flächen II. Ordnung von den beiden übrigen in Raumcurven vierter Ordnung geschnitten wird, so ist der Satz links eine unmittelbare Folge der vorhergehenden. Zerfällt aber eine oder jede der beiden Schnittcurven in Gerade oder Kegelschnitte, oder in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, so ergiebt sich der sehr leichte Beweis des Satzes theils aus dem

*) Diese wichtige Eigenschaft der acht Schnittpunkte von drei Flächen II. Ordnung wurde wohl zuerst von Hesse (in Crelle's Journal f. Math., Bd. 26) veröffentlicht.

Vorhergehenden, theils aus den bekanntesten Eigenschaften der Curven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

„Durch sieben beliebige Punkte ist im Allgemeinen ein achter „Punkt bestimmt, welcher auf allen durch die sieben Punkte „gehenden Flächen zweiter Ordnung liegt."*)

Wenn von den sieben Punkten drei in einer Geraden oder fünf auf einem Kegelschnitte oder alle sieben auf einer Raumcurve dritter Ordnung liegen, so kann jeder Punkt dieser Linie erster, zweiter oder dritter Ordnung als der durch sie (unvollständig) bestimmte achte Punkt aufgefasst werden. Wenn keiner dieser besonderen Fälle eintritt, so wird der achte Punkt durch folgende lineare Constructionen gefunden. Man lege durch sechs von den sieben Punkten eine Raumcurve dritter Ordnung und ziehe an diese aus dem siebenten Punkte eine Sehne s (vergl. Seite 89), wiederhole sodann diese Construction unter Vertauschung des siebenten Punktes mit einem der sechs übrigen; die so erhaltenen Sehnen s schneiden sich in dem gesuchten achten Punkt. Dass die zuerst construirte Sehne mit einer beliebig durch die sieben Punkte gelegten Fläche zweiter Ordnung diesen so construirten Punkt gemein hat, ergiebt sich sofort aus einem der obigen Sätze und daraus, dass die Sehne mit der zugehörigen Raumcurve dritter Ordnung durch einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung verbunden werden kann.

Durch acht beliebige Punkte des Raumes, von denen keine fünf in einer Ebene und keine drei in einer Geraden liegen, kann im Allgemeinen eine einzige Raumcurve vierter Ordnung gelegt werden; denn wenn zwei solche Curven in jenen acht Punkten sich schneiden, so haben die Punkte eine besondere Lage, indem jede Raumcurve dritter Ordnung, welche durch sechs derselben geht, die Verbindungslinie der beiden letzten Punkte zur Sehne hat. Wir können die Raumcurve vierter Ordnung als construirt ansehen, sobald irgend zwei Flächen zweiter Ordnung gegeben sind, welche sich in derselben schneiden; und solche Flächen erhalten wir durch Lösung der folgenden Aufgabe:

„Durch acht beliebig gegebene Punkte, von denen keine „sechs in einer Ebene und keine vier in einer Geraden liegen, „Regelflächen zweiter Ordnung zu legen."

*) Die Eckpunkte von zwei beliebigen Poltetraedern eines räumlichen Polarsystems bilden (Seite 69) eine Gruppe von acht Punkten, durch welche doppelt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung gelegt werden können.

Liegen irgend drei der gegebenen Punkte in einer Geraden g, so gehört dieselbe jeder der verlangten Regelflächen an. Wenn zugleich die übrigen fünf in einer Ebene ε liegen, also auf einem Kegelschnitt $\varkappa$, der auch aus zwei Geraden bestehen kann, und wenn der Schnittpunkt von g und ε dem Kegelschnitt $\varkappa$ nicht angehört, so zerfällt jede durch die acht Punkte gelegte Fläche II. Ordnung in zwei Ebenen, von denen ε die eine ist; denn ε hat mit der Fläche II. Ordnung sechs Punkte gemein, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Sind die acht Punkte auf vier, durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden gelegen, von denen die eine drei jener Punkte enthält, so liegen diese Geraden auf allen durch die acht Punkte gehenden Flächen II. Ordnung, und letztere sind Kegelflächen. In jedem anderen Falle lässt sich die Aufgabe wie folgt lösen:

Im Allgemeinen können unter den acht Punkten sechs auf verschiedene Art so gewählt werden, dass von denselben keine vier in einer Ebene liegen. Wir verbinden diese sechs Punkte durch eine Raumcurve dritter Ordnung, ziehen an dieselbe aus dem siebenten und achten Punkte Sehnen und legen alsdann durch letztere und die Raumcurve dritter Ordnung eine Regelfläche. Durch eine andere Gruppirung der gegebenen acht Punkte gelangen wir zu einer zweiten Regelfläche. Die verlangte Gruppirung ist nur dann zuweilen unausführbar, wenn die acht Punkte auf den vier Kanten a, b, c, d eines windschiefen Vierecks liegen. In diesem Falle schneiden wir zwei Gegenkanten a und c des Vierecks durch irgend eine Gerade f, welche durch keinen der vier Eckpunkte geht; die Regelschaar, welcher die drei Strahlen b, d, f angehören, liegt alsdann auf einer durch alle acht Punkte gehenden Regelfläche.

Durch neun beliebig gegebene Punkte eine Fläche II. Ordnung zu legen.

An neun beliebig gegebene Berührungs-Ebenen eine Fläche II. Classe zu legen.

Durch acht der gegebenen Punkte legen wir zwei Regelflächen F^2 und F_1^2, und suchen sodann diejenige Fläche F_2^2 des durch F^2 und F_1^2 bestimmten Flächenbüschels, welche durch den neunten Punkt geht. Wie diese Fläche F_2^2 am leichtesten construirt werden kann, werden wir unten (Seite 160) sehen.

Durch neun beliebig gegebene Punkte kann eine und im Allgemeinen nur eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden.

Durch neun beliebig gegebene Ebenen kann ein und im Allgemeinen nur ein Ebenenbündel zweiter Ordnung gelegt werden.

Gehen nämlich mehrere Flächen zweiter Ordnung durch die neun Punkte, so liegen die letzteren auf einer Raumcurve vierter Ordnung, in welcher irgend zwei jener Flächen sich schneiden und welche auch in Linien niedrigerer Ordnung zerfallen kann. Uebrigens ist zu bemerken, dass bei besonderer Lage der neun Punkte, z. B. wenn sechs von ihnen in einer Ebene liegen, die Fläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen zerfallen kann.

Zwanzigster Vortrag.

Projectivische Beziehungen der F^2-Büschel und der Kegelschnittbüschel.

Im letzten Vortrage und am Ende des vierzehnten sind wir zu Büscheln von Flächen II. Ordnung gelangt, welche u. A. folgende Eigenschaften besitzen:

„Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P in Bezug „auf alle Flächen des Büschels bilden einen Ebenenbüschel „I. Ordnung. Nur wenn P ein Hauptpunkt des Flächenbüschels „ist, fallen alle seine Polar-Ebenen zusammen.“

Wir wählen diesen Satz zum Ausgangspunkte einer Theorie der F^2-Büschel. Durch das Reciprocitäts-Gesetz lassen sich alle gefundenen Sätze unmittelbar auf die Schaaren von Flächen II. Classe übertragen, von welchen wir übrigens im 23. Vortrage noch einen besonderen Fall untersuchen werden. Bereits im letzten Vortrage haben wir aus obigem Satze die Folgerung gezogen, dass durch jeden Punkt des Raumes, welcher nicht allen Flächen des Büschels angehört, eine einzige dieser Flächen geht.

Wir wollen von zwei Punkten sagen, sie seien „conjugirt hinsichtlich des F^2-Büschels“, wenn jeder derselben auf sämmtlichen Polar-Ebenen des anderen liegt. Der obige Satz kann dann auch folgendermassen ausgesprochen werden:

„Zwei Punkte sind hinsichtlich des F^2-Büschels conjugirt, „sobald sie in Bezug auf irgend zwei Flächen desselben con„jugirt sind.“

Einem Punkte P des Raumes sind daher alle Punkte einer Geraden p conjugirt, welche mit Hülfe von zwei beliebigen Flächen F^2 und F^2_1 des Büschels construirt werden kann; nämlich in p schneiden sich die Polar-Ebenen des Punktes P hinsichtlich der beiden Flächen F^2 und F^2_1. Beschreibt nun P eine Gerade g, so beschreiben seine beiden Polar-Ebenen in Bezug auf F^2 und F^2_1 zwei zu g projectivische Ebenenbüschel, und die zu P conjugirte Gerade p beschreibt eine Kegelfläche II. Ordnung oder eine Regelschaar, je nachdem die Axen der beiden Ebenenbüschel sich schneiden oder nicht. Daraus folgt:

„Diejenigen Geraden, welche den Punkten einer beliebigen „Geraden g conjugirt sind hinsichtlich des F^2-Büschels, bilden „eine zu g projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regel-„schaar. Im ersteren Falle liegen auf der Kegelfläche II. Ord-„nung auch die Polaren von g hinsichtlich der Flächen des „Büschels; im letzteren Falle sind die Polaren von g Leit-„strahlen der Regelschaar. Statt der Kegelfläche II. Ordnung „erhalten wir nur dann zwei Ebenen, wenn g einen Hauptpunkt „des Flächenbüschels enthält.“

Die Gerade g kann als Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten P und Q des Raumes betrachtet werden, denen zwei Gerade p und q conjugirt sind. Die Polare von g in Bezug auf eine beliebige Fläche F^2 des Büschels liegt dann zufolge des letzten Satzes entweder auf einer durch p und q gehenden Kegelfläche II. Ordnung oder in einer Regelschaar, von welcher p und q zwei Leitstrahlen sind; ausserdem wird die Polare von g aus p und q durch zwei Ebenen projicirt, welche von P und Q die Polar-Ebenen sind hinsichtlich der Fläche F^2. Da nun eine Kegelfläche II. Ordnung aus je zwei ihrer Strahlen, und eine Regelschaar aus je zwei ihrer Leitstrahlen durch projectivische Ebenenbüschel projicirt wird, so ergiebt sich:

„Die beiden Ebenenbüschel p und q, welche von den Polar-„Ebenen von zwei beliebigen Punkten P, Q gebildet werden, sind „projectivisch, wenn je zwei Ebenen einander entsprechen, „welche von P und Q die Polar-Ebenen sind in Bezug auf „eine und dieselbe Fläche des F^2-Büschels.“

Die Polar-Ebenen von vier beliebigen Punkten bilden vier projectivische Ebenenbüschel, und es giebt (Seite 93) im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in welchem je vier homologe

Ebenen dieser Büschel sich schneiden. Daraus schliessen wir (vgl. Seite 150):

„Der F^2-Büschel enthält im Allgemeinen höchstens vier „Kegelflächen zweiter Ordnung."

Nämlich die Polar-Ebenen der vier Punkte bezüglich einer Kegelfläche schneiden sich im Mittelpunkte derselben.

Auf den vorletzten Satz stützt sich die folgende Definition:

„Vier Flächen des F^2-Büschels sollen vier harmonische „Flächen genannt werden, wenn die vier Polar-Ebenen eines „und folglich jedes beliebigen Punktes in Bezug auf diese „Flächen einen harmonischen Ebenenbüschel bilden."

Natürlich sind auch hier die Hauptpunkte des Flächenbüschels ausgenommen, weil deren Polar-Ebenen zusammenfallen. Wir können nunmehr auf die F^2-Büschel die allgemeine Definition der projectivischen Verwandtschaft anwenden (I. Abth. Seite 43 und 104), können sie also auf beliebige Elementargebilde projectivisch beziehen. Weisen wir z. B. jeder Fläche F^2 des Flächenbüschels diejenige Ebene zu, welche von einem beliebigen Punkte P die Polar-Ebene ist in Bezug auf F^2, so ist der Flächenbüschel projectivisch auf den Büschel dieser Polar-Ebenen bezogen; und mit Hülfe dieses Ebenenbüschels kann der Flächenbüschel auch auf jedes andere Elementargebilde projectivisch bezogen werden. Ohne Weiteres ergiebt sich u. A.:

„Die Polaren einer Geraden g hinsichtlich des Flächen- „büschels bilden eine zu letzterem projectivische Kegelfläche „II. Ordnung oder Regelschaar."

Die geradlinige Fläche zweiter Ordnung, auf welcher diese Polaren liegen, hat mit der Schnittcurve k^4 von irgend zwei Flächen des Büschels höchstens acht Punkte gemein (Seite 151). Jeder dieser Punkte ist der Berührungspunkt einer Tangentialebene, welche durch g an k^4 gelegt werden kann. Eine beliebige Gerade wird demnach von höchstens acht Tangenten der Raumcurve k^4 vierter Ordnung geschnitten.

Die Pole einer beliebigen Ebene hinsichtlich des Flächenbüschels construiren wir, indem wir in der Ebene die Eckpunkte P, Q, R eines Dreiecks annehmen und deren Polar-Ebenen bezüglich jeder Fläche des Büschels zum Durchschnitt bringen. Die drei Ebenenbüschel, welche von diesen Polar-Ebenen gebildet werden, sind zu dem Flächenbüschel und zu einander projectivisch; also:

„Die Pole einer beliebigen Ebene hinsichtlich der Flächen „eines F^2-Büschels bilden im Allgemeinen eine zu dem letzteren „projectivische Raumcurve dritter Ordnung. Den Punkten der „Ebene sind die Sehnen der Raumcurve conjugirt (Seite 92). „Die Ebene wird von höchstens drei Flächen des Büschels „berührt; die Berührungspunkte liegen auf jener Raumcurve."

Zu demselben Resultat gelangen wir auch, wenn wir zu jedem Punkte der Ebene die Polar-Ebenen bestimmen in Bezug auf irgend zwei Flächen des Büschels. Wir erhalten dann zwei collineare Strahlenbündel, welche die Raumcurve dritter Ordnung und deren Sehnensystem erzeugen. Geht die Ebene durch einen Hauptpunkt des Büschels, so tritt eine Ausnahme von dem Satze ein. Sei R dieser Hauptpunkt und ρ seine Polar-Ebene hinsichtlich aller Flächen des Büschels. Dann erzeugen die beiden Büschel der Polar-Ebenen von P und Q eine zum Flächenbüschel projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar, welche mit ρ die sämmtlichen Pole der gegebenen Ebene gemein hat; also:

„Die Pole einer Ebene, welche durch einen Hauptpunkt des „Flächenbüschels geht, bilden einen zum Büschel projectivischen „Kegelschnitt."

Auch hier tritt wieder eine leicht zu erkennende Ausnahme ein, wenn die Ebene zwei Hauptpunkte enthält, oder wenn sie eine Haupt-Ebene des Büschels ist.

Aus dem vorhergehenden Satze haben wir bereits im letzten Vortrage den Schluss gezogen, dass jede Ebene von mindestens einer Fläche und von höchstens drei Flächen des Büschels berührt wird. — Liegt die gegebene Ebene im Unendlichen, so fallen ihre Pole mit den Mittelpunkten der Flächen II. Ordnung zusammen: oder:

„Die Mittelpunkte aller Flächen des F^2-Büschels liegen auf „einer Raumcurve dritter Ordnung oder auf einem Kegelschnitt, „je nachdem der Büschel keinen oder einen unendlich fernen „Hauptpunkt besitzt. Im Allgemeinen enthält deshalb der „F^2-Büschel höchstens drei Paraboloide und mindestens ein „solches."

Der Schnitt eines F^2-Büschels mit einer beliebigen Ebene wird ein „Kegelschnittbüschel" genannt. Durch jeden Punkt der Ebene, welcher nicht auf allen Kegelschnitten dieses Büschels liegt, geht ein einziger derselben; und zwei Punkte, welche in Bezug auf irgend zwei Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind,

sind bezüglich aller seiner Kegelschnitte conjugirt (Seite 154). Zugleich gelten die Sätze (Seite 155):

„Diejenigen Punkte, welche in Bezug auf einen Kegel- „schnittbüschel den Punkten einer Geraden g der Ebene con- „girt sind, bilden im Allgemeinen eine zu g projectivische „Curve zweiter Ordnung, dieselbe geht auch durch die Pole „von g bezüglich der Kegelschnitte des Büschels. Die Polaren „von zwei beliebigen Punkten P, Q der Ebene in Bezug auf „diese Kegelschnitte bilden zwei projectivische Strahlenbüschel „erster Ordnung; und zwar entsprechen in den letzteren je „zwei Strahlen einander, die von P und Q die Polaren sind „in Bezug auf irgend einen der Kegelschnitte.“

Sind also irgend drei Kegelschnitte des Büschels gegeben, so ist die projectivische Beziehung der Strahlenbüschel, die von den Polaren beliebiger Punkte der Ebene gebildet werden, völlig bestimmt, und man kann in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt des Büschels die Polare eines jeden Punktes der Ebene linear construiren, sobald die Polare eines beliebigen Punktes gegeben ist. Daraus folgt, dass der Büschel durch drei seiner Kegelschnitte völlig bestimmt ist.

Wir können nun aber zeigen, dass der Kegelschnittbüschel sogar schon durch zwei seiner Kegelschnitte bestimmt ist. Durch einen passend gewählten Punkt P der Ebene kann man unendlich viele Gerade legen, welche entweder keinen oder einen oder jeden der beiden Kegelschnitte in reellen Punkten schneiden, und zwar im letzten Falle so, dass das eine Paar von Schnittpunkten durch das andere nicht getrennt ist. Auf jeder so durch P gelegten Geraden s der Ebene giebt es (I. Abth. Seite 146) zwei reelle Punkte M, N, welche hinsichtlich der beiden Kegelschnitte und somit in Bezug auf den Kegelschnittbüschel conjugirt sind; der Punkt, in welchem s von dem durch P gehenden Kegelschnitte des Büschels zum zweiten Male geschnitten wird, ist demnach völlig bestimmt, weil er von P durch die beiden conjugirten Punkte M und N harmonisch getrennt ist. Daraus folgt, dass durch die beiden Kegelschnitte des Büschels der durch P gehende Kegelschnitt desselben und damit der ganze Kegelschnittbüschel bestimmt ist. Oder:

„Zwei Kegelschnittbüschel sind identisch, wenn sie irgend „zwei Kegelschnitte mit einander gemein haben. Wenn von „einem F^2-Büschel irgend zwei Flächen durch zwei Kegel-

„schnitte eines Kegelschnittbüschels gehen, so ist letzterer ein „Schnitt des F^2-Büschels.“

Zwei beliebig in der Ebene angenommene Kegelschnitte bestimmen einen durch sie gehenden Kegelschnittbüschel; derselbe ist ein Schnitt jedes F^2-Büschels, von welchem zwei Flächen durch die beiden Kegelschnitte gehen.

Ein Kegelschnittbüschel, dessen Curven einen reellen Punkt U mit einander gemein haben, kann u. A. aufgefasst werden als Schnitt eines F^2-Büschels, dessen Flächen sich in einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden. Legt man nämlich durch U eine Gerade a, die nicht in der Ebene des Büschels liegt, und verbindet dieselbe mit irgend zwei Kegelschnitten des Büschels durch Flächen zweiter Ordnung, die sich in a schneiden, so haben letztere noch eine Raumcurve dritter Ordnung k^3 mit einander gemein, von welcher a eine Sehne ist; der Kegelschnittbüschel aber ist von dem durch a und k^3 gehenden F^2-Büschel ein Schnitt. Von dem Schnitte eines solchen F^2-Büschels aber haben wir schon früher (Seite 121) den Satz bewiesen:

„Ein Kegelschnittbüschel wird von jeder Geraden, die durch „keinen gemeinschaftlichen Punkt seiner Kegelschnitte geht, in „einer involutorischen Punktreihe geschnitten, sodass je zwei „einander zugeordnete Punkte derselben auf einem und dem„selben Kegelschnitte des Büschels liegen.“

Nach dem Vorhergehenden gilt dieser Satz für jeden Kegelschnittbüschel, dessen Curven einen reellen Punkt mit einander gemein haben; er gilt aber auch für jeden anderen Kegelschnittbüschel. Wenn nämlich zwei Kegelschnitte eines Büschels sich in keinem reellen Punkte schneiden oder berühren, so werden sie von keiner Geraden der Ebene in Punktenpaaren geschnitten, die sich gegenseitig trennen, und es giebt folglich in jeder Geraden der Ebene zwei Punkte M, N, die in Bezug auf jene beiden und folglich bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind; diese beiden Punkte M, N sind die Ordnungspunkte der involutorischen Punktreihe, in welcher der Kegelschnittbüschel von der Geraden geschnitten wird.

Da ein F^2-Büschel mit einer Ebene allemal einen Kegelschnittbüschel gemein hat, so ergiebt sich aus dem obigen Satze:

„Ein F^2-Büschel wird von jeder Geraden, die durch keinen „gemeinschaftlichen Punkt seiner Flächen geht, in einer in„volutorischen Punktreihe geschnitten; die Gerade wird von

„höchstens zwei Flächen des Büschels berührt, und zwar in „den Ordnungspunkten dieser Punktreihe.“

Aus dieser Eigenschaft der F^2-Büschel lässt sich eine sehr einfache Lösung der schon früher (Seite 153) gestellten Aufgabe ableiten:

„Die Fläche II. Ordnung zu construiren, welche einem „durch zwei seiner Flächen F^2 und F_1^2 bestimmten F^2-Büschel „angehört und durch einen beliebig angenommen Punkt P geht.“

Man lege durch P Gerade, welche die Flächen F^2 und F_1^2 in je zwei reellen Punkten schneiden. Jede dieser Geraden wird von dem F^2-Büschel in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, welche durch jene zwei Paar Schnittpunkte völlig bestimmt ist; die gesuchte Fläche aber geht durch den Punkt, welcher in der Punktreihe dem Punkte P zugeordnet ist. — Die Construction ist nur dann nicht immer direct anwendbar, wenn die Flächen F^2 und F_1^2 sich gegenseitig ausschliessen. In diesem Falle construiren wir zunächst auf die angegebene Weise innerhalb F^2 irgend eine dritte Fläche F_2^2 des Büschels; alsdann können durch P unendlich viele Secanten an F^2 und F_2^2 gezogen werden, und die Construction führt zum Ziele. Man kann von ihr bei der Aufgabe Gebrauch machen: „Durch neun Punkte eine Fläche II. Ordnung zu legen“, deren Lösung am Ende des letzten Vortrages angegeben wurde.

Vier Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels sollen vier harmonische Kegelschnitte genannt werden, wenn sie auf vier harmonischen Flächen eines F^2-Büschels liegen. Die Polaren eines beliebigen Punktes der Ebene hinsichtlich der vier harmonischen Kegelschnitte bilden einen harmonischen Strahlenbüschel, wenn sie nicht ausnahmsweise zusammenfallen. Im Allgemeinen besitzt die Ebene eines Kegelschnittbüschels mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte, für welche die sämmtlichen Polaren sich vereinigen; nämlich da die Geraden, welche hinsichtlich des F^2-Büschels den Punkten der Ebene conjugirt sind, im Allgemeinen aus den Sehnen einer Raumcurve dritter Ordnung bestehen, so liegen in der Ebene höchstens drei derselben und mindestens eine.

Den Kegelschnittbüschel können wir auf ein beliebiges Elementargebilde projectivisch beziehen, so dass je vier harmonischen Kegelschnitten des ersteren allemal vier harmonische Elemente des letzteren entsprechen. Weisen wir z. B. jedem Kegelschnitte k^2 des Büschels die Gerade zu, welche von einem beliebigen Punkte

der Ebene die Polare ist in Bezug auf k^2, so ist der von den Polaren gebildete Strahlenbüschel projectivisch auf den Kegelschnittbüschel bezogen; und mittelst eines solchen Strahlenbüschels kann dann auch jedes andere Elementargebilde projectivisch auf den Kegelschnittbüschel bezogen werden. Der letztere ist auch zu jedem F^2-Büschel projectivisch, von welchem er ein Schnitt ist; denn je vier harmonischen Kegelschnitten des Curvenbüschels entsprechen die vier durch sie hindurchgehenden harmonischen Flächen des Flächenbüschels. Hier kann jedoch der beachtenswerthe Fall eintreten, dass nicht jede der Flächen II. Ordnung von der Ebene des Curvenbüschels geschnitten wird; so dass freilich jedem Kegelschnitt dieses Büschels eine der Flächen II. Ordnung entspricht, nicht aber jeder dieser Flächen einer von den Kegelschnitten. Alsdann sind die Strahlenbüschel, welche von den Polaren beliebiger Punkte in Bezug auf die Kegelschnitte gebildet werden, unvollständig und bestehen nur aus Winkeln; für diese Winkel gelten jedoch die vorhin angegebenen projectivischen Beziehungen. Und diejenigen Flächen II. Ordnung, welche von der Ebene des Kegelschnittbüschels nicht getroffen werden, bestimmen gleichwohl in dieser Ebene je ein Polarsystem, welches zwar keine Ordnungscurve besitzt, aber in vieler Hinsicht eine Curve II. Ordnung vollständig vertritt. Uebrigens kann der genannte Fall nur dann eintreten, wenn die Kegelschnitte keine reellen Punkte mit einander gemein haben.

Haben die Flächen eines F^2-Büschels einen reellen Punkt U mit einander gemein, so wird eine beliebig durch U gelegte Gerade g, die auf keiner der Flächen enthalten ist, von denselben in je einem von U verschiedenen Punkte geschnitten, und umgekehrt muss durch jeden solchen Punkt von g eine einzige Fläche des Büschels hindurchgehen. Ich behaupte nun:

„Wenn an jeder Fläche des F^2-Büschels in ihrem von U ver-
„schiedenen Schnittpunkte mit der Geraden g eine Berührungs-
„Ebene construirt wird, so bilden alle diese Berührungs-
„Ebenen einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung, welcher zu
„der Punktreihe g perspectivisch ist.“

Jede dieser Berührungs-Ebenen verbindet einen Punkt von g mit der ihm conjugirten Geraden. Ferner bilden alle Geraden, welche den Punkten von g conjugirt sind, eine zu g projectivische Kegelfläche II. Ordnung oder Regelschaar (Seite 155), und der Punkt U liegt auf dem ihm conjugirten Strahle dieses Gebildes. Im

Falle der Kegelfläche II. Ordnung folgt daher der Satz aus einem früher bewiesenen (I. Abth. Seite 111). Im Falle der Regelschaar verbinden wir drei beliebige Punkte A, B, C der Punktreihe g mit den ihnen conjugirten Geraden durch Ebenen, die sich in einem Punkte S schneiden. Die Regelschaar wird aus S durch einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung projicirt, welcher auch zu der Punktreihe g projectivisch sein muss und zu derselben perspectivische Lage hat, weil vier Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte U, A, B, C von g hindurchgehen (I. Abth. Seite 109).

Jede Ebene des Büschels I. oder II. Ordnung enthält auch die Polare von g in Bezug auf diejenige Fläche II. Ordnung, welche von der Ebene berührt wird. Der Ebenenbüschel ist folglich auch zu der Kegelfläche II. Ordnung oder der Regelschaar perspectivisch, welche von den Polaren der Geraden g gebildet wird, und somit projectivisch zu dem F^2-Büschel. Daraus folgt aber, dass auch die Punktreihe g projectivisch auf den F^2-Büschel bezogen ist, wenn jedem von U verschiedenen Punkte von g die durch ihn gehende Fläche des Büschels zugewiesen ist. Nach der Analogie mit früheren Sätzen wollen wir in diesem Falle sagen, die Punktreihe g liege perspectivisch zu dem Flächenbüschel oder sei ein Schnitt desselben; wir erhalten dann den Satz:

„Alle Geraden, welche je einen gemeinschaftlichen Punkt „der Flächen II. Ordnung enthalten und keiner der Flächen „angehören, werden von dem Flächenbüschel in projectivischen „Punktreihen geschnitten; letztere sind auch zu dem Flächen„büschel projectivisch und liegen zu ihm perspectivisch.“

Für Kegelschnittbüschel haben wir denselben Satz der Hauptsache nach bereits früher (Seite 121) ausgesprochen, wenn auch in anderer Form. Der Beweis vereinfacht sich in dem speciellen Falle, wenn die Gerade g in einer Hauptebene des Flächenbüschels liegt.

Die projectivische Verwandtschaft, welche sich zwischen Flächenbüscheln II. Ordnung und beliebigen Elementargebilden aufstellen lässt, führt uns zu einer Fülle von neuen interessanten Aufgaben. Wir wollen von denselben nur die folgende besprechen:

„Von welcher Ordnung ist die Fläche, welche ein F^2-Büschel „mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung „erzeugt?“

Der so erzeugten Fläche gehört jeder Kegelschnitt an, den irgend eine Fläche des F^2-Büschels mit der ihr entsprechenden Ebene gemein hat; sie enthält deshalb die Axe des Ebenenbüschels und jeden gemeinschaftlichen Punkt der Flächen II. Ordnung. Eine Gerade, welche die Axe des Ebenenbüschels schneidet, hat ausser dem Schnittpunkt noch höchstens zwei Punkte mit der Fläche gemein, wenn sie nicht ganz in dieselbe hineinfällt. Wir werden zeigen, dass die Fläche mit einer beliebigen Geraden g, die nicht ganz in sie hineinfällt, höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein hat, also von der dritten Ordnung ist.

Die Gerade g wird von dem Ebenenbüschel in einer zu ihm und zum Flächenbüschel projectivischen Punktreihe geschnitten. Wir wollen nun zunächst beweisen:

> „Wenn ein gerades Gebilde g auf einen F^2-Büschel projec-
> „tivisch bezogen ist, und man construirt zu jedem Punkte P
> „von g die Polar-Ebene in Bezug auf die ihm entsprechende
> „Fläche π^2 des Büschels, so bilden alle diese Polar-Ebenen
> „einen zu g projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung, und
> „nur in ganz speciellen Fällen schneiden sie sich in einer und
> „derselben Geraden.“

Zu dem Punkte P von g construiren wir die Polar-Ebene hinsichtlich der ihm entsprechenden Fläche π^2, indem wir die Polare von g in Bezug auf π^2 mit derjenigen Geraden verbinden, welche dem Punkte P hinsichtlich des Flächenbüschels conjugirt ist. Den Punkten von g sind aber die Strahlen einer zu g projectivischen Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung conjugirt; und die Polaren von g bilden eine zweite, zu dem Flächenbüschel projectivische Regelschaar resp. Kegelfläche II. Ordnung. Die beiden Strahlengebilde, welche wir so erhalten, sind aber projectivisch, weil das gerade Gebilde und der Flächenbüschel projectivisch sind; und sie erzeugen (I. Abth. Seite 112) im Allgemeinen einen zu g projectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung, weil im ersten Fall jede der Regelschaaren die Leitschaar der anderen ist und weil im zweiten Falle die beiden Kegelflächen II. Ordnung in einander liegen (Seite 155). Nur dann gehen die Verbindungs-Ebenen von je zwei einander entsprechenden Strahlen durch eine und dieselbe Gerade, wenn im letzteren Falle die Kegelflächen II. Ordnung involutorisch liegen. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, da der zweite Fall ohnehin nur bei besonderer Lage der Geraden g eintritt.

Die Punktreihe g liegt nun entweder perspectivisch zu jenem Ebenenbüschel II. Ordnung, oder mindestens ein Punkt und höchstens drei Punkte von g liegen in den ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels (I. Abth. Seite 108)*). Jeder solche Punkt ist aber sich selbst conjugirt hinsichtlich der ihm entsprechenden Fläche des F^2-Büschels; oder:

„Wenn ein gerades Gebilde g auf einen F^2-Büschel projec- „tivisch bezogen ist, so liegen höchstens drei Punkte von g „auf den ihnen entsprechenden Flächen II. Ordnung und „mindestens ein Punkt, es sei denn, dass das gerade Gebilde „zu dem Flächenbüschel perspectivische Lage hat."

Daraus ergiebt sich nunmehr als Lösung der vorhin gestellten Aufgabe der Satz:

Ein Büschel von Flächen II. Ordnung erzeugt mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung eine Fläche dritter Ordnung, welche mit jeder nicht auf ihr gelegenen Geraden höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein hat. Diese Fläche dritter Ordnung geht durch alle gemeinschaftlichen Punkte der Flächen II. Ordnung und durch die Axe a *des Ebenenbüschels. Von den Ebenen des letzteren wird sie ausserdem in Curven II. Ordnung geschnitten, und diese wiederum schneiden die Axe* a *in einer involutorischen Punktreihe.*

Besteht der Ebenenbüschel aus den Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Flächen II. Ordnung, so folgt:

„Die Berührungspunkte aller Tangenten, welche aus einem „beliebigen Punkte an die Flächen eines F^2-Büschels gezogen „werden können, liegen auf einer Fläche dritter Ordnung. Die- „selbe geht durch jenen Punkt und durch die ihm conjugirte „Gerade a und hat mit einer durch a gelegten Ebene entweder „nur diese Gerade a oder noch einen Kegelschnitt gemein; sie „geht ausserdem durch jeden gemeinschaftlichen Punkt der „Flächen II. Ordnung."

---

*) Entsprechen der Geraden g zwei involutorisch liegende Kegelflächen II. Ordnung, so gelangen wir zu demselben Ergebniss wie folgt. Wir projiciren aus der Involutionsaxe der Kegelflächen die Punktreihe g durch einen Ebenenbüschel. Dieser ist auch zu den Kegelflächen projectivisch und folglich gehen höchstens drei seiner Ebenen durch die entsprechenden Strahlen der letzteren und mindestens eine.

Einundzwanzigster Vortrag.

Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche II. Ordnung liegen. Normalen der Fläche II. Ordnung.

Wir wollen von den Sätzen des achtzehnten Vortrages über die tetraedralen Strahlencomplexe eine weitere Anwendung machen, indem wir zeigen, dass die Normalen einer Fläche II. Ordnung und die Axen aller auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte einen solchen Strahlencomplex bilden. Wir werden dabei die bis jetzt bekannten wichtigeren Sätze über diese Normalen und Axen in einem sehr einfachen Zusammenhange kennen lernen. Von der folgenden Untersuchung schliesse ich zunächst nur den Fall aus, in welchem die gegebene Fläche II. Ordnung eine Cylinderfläche ist.

Die Polare einer Normalen der Fläche II. Ordnung, d. h. einer Geraden, welche in einem Punkte der Fläche auf der Berührungsebene dieses Punktes senkrecht steht, liegt in dieser Berührungsebene, ist also zu der Normalen rechtwinklig. Suchen wir demnach sämmtliche Gerade des Raumes, welche zu ihren Polaren rechtwinklig sind, so sind unter ihnen auch die Normalen der Fläche II. Ordnung enthalten. Zu diesen Geraden gehören die Axen eines jeden auf der Fläche gelegenen Kegelschnittes; denn eine solche Axe ist zu allen Geraden conjugirt, welche in der Ebene des Kegelschnittes zu ihr normal gezogen werden können; und weil der unendlich ferne Punkt, durch welchen diese Geraden gehen, auch auf der Polare der Axe liegen muss (Seite 39), so ist auch diese Polare zu der Axe rechtwinklig, ohne jedoch sie zu schneiden. Umgekehrt ist jede Gerade des Raumes, welche zu ihrer Polare normal ist, die Axe eines Kegelschnittes der Fläche II. Ordnung oder doch eines ebenen Polarsystems, welches dem von der Fläche bestimmten räumlichen Polarsysteme angehört; und zwar geht die Ebene dieses Polarsystems durch die Gerade und ist parallel zu deren Polare. Wird die Gerade von ihrer Polare geschnitten, so liegen beide in einer Berührungsebene der Fläche II. Ordnung, und ihr Schnittpunkt fällt mit dem Berührungspunkte zusammen; der Kegelschnitt aber, als dessen Axen sie betrachtet werden können, reducirt sich auf den Be-

rührungspunkt oder auch auf eine oder zwei Gerade der Fläche II. Ordnung.

Die drei Hauptaxen jeder Kegelfläche II. Ordnung, welche der gegebenen Fläche II. Ordnung umschrieben ist, gehören gleichfalls zu den hier betrachteten Geraden. Denn weil diese drei Hauptaxen sich rechtwinklig schneiden und paarweise conjugirt sind, so liegt die Polare einer jeden von ihnen in der Ebene der beiden andern und ist zu der ihr zugeordneten Hauptaxe rechtwinklig. Jede Gerade, welche zu ihrer Polare normal ist, kann als Hauptaxe einer solchen umschriebenen Kegelfläche oder doch eines polaren Strahlenbündels betrachtet werden, welcher dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsysteme angehört; und zwar wird die Gerade im Mittelpunkte der Kegelfläche oder des Bündels von einer zu ihr senkrechten und durch die Polare gehenden Ebene geschnitten.

Wir wollen hiernach jede Gerade des Raumes, welche zu ihrer Polare normal ist, eine „Axe" der Fläche II. Ordnung nennen; das Vorhergehende können wir dann wie folgt zusammenfassen:

Die Axen jedes auf der Fläche II. Ordnung gelegenen Kegelschnittes und die Hauptaxen jeder der Fläche umschriebenen Kegelfläche, so wie alle Normalen der Fläche II. Ordnung sind Axen dieser Fläche, d. h. zu ihren resp. Polaren rechtwinklig. Umgekehrt ist jede Axe der Fläche zugleich Axe eines ebenen Polarsystems und eines polaren Strahlenbündels, welche beide dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsysteme angehören. Die Axen der Fläche sind in diesem Polarsysteme paarweise einander zugeordnet.

Eine Fläche II. Ordnung, die keine Rotationsfläche ist, hat (nach Seite 43 und 45) entweder drei Symmetrie-Ebenen, die sich in den drei Hauptaxen rechtwinklig schneiden, und einen Mittelpunkt; oder sie hat nur zwei Symmetrie-Ebenen, die sich in einer Hauptaxe rechtwinklig schneiden, und ist ein Paraboloid, welches keinen Mittelpunkt besitzt. Weil die Geraden, welche auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht stehen, zugleich auf ihren Polaren senkrecht sind, indem diese in der Symmetrie-Ebene liegen, so folgt:

Jede Gerade, welche in einer Symmetrie-Ebene liegt, oder eine solche rechtwinklig schneidet, ist eine Axe der Fläche II. Ordnung.

Ein beliebiger Durchmesser der Fläche II. Ordnung steht im Allgemeinen nicht senkrecht zu den ihm conjugirten Ebenen; doch giebt es in jeder solchen Ebene Strahlen, welche zu dem Durchmesser senkrecht stehen. Und weil diese Strahlen zugleich dem Durchmesser conjugirt sind, so schneidet diejenige durch letzteren gelegte Ebene, welche jenen Strahlen parallel läuft, die Fläche II. Ordnung in einem Kegelschnitt, von welchem der Durchmesser eine Axe ist; oder auch sie ist der Träger eines ebenen Polarsystems, zu dessen Axen der Durchmesser gehört. Also:

Jeder Durchmesser der Fläche II. Ordnung ist zugleich eine Axe derselben.

Wenn die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt hat, so steht jede Hauptaxe derselben auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht; ist aber die Fläche ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, so laufen mit ihrer Hauptaxe alle Durchmesser parallel. Aus den letzten beiden Sätzen folgt somit:

Jede Gerade, welche zu einer Hauptaxe parallel läuft, ist eine Axe der Fläche II. Ordnung.

Durch jeden Punkt P des Raumes gehen unendlich viele Axen der Fläche II. Ordnung, und eine derselben ist die Gerade n, welche durch den Punkt P senkrecht zu seiner Polar-Ebene π gelegt werden kann. Sei n_1 die in π liegende Polare von n, und suchen wir zunächt alle übrigen in π gelegenen Axen. Jede derselben steht auf der Polar-Ebene desjenigen Punktes senkrecht, in welchem sie von n_1 geschnitten wird; denn diese Polar-Ebene enthält ausser n noch die Polare der Axe, also zwei zu dieser Axe senkrechte Gerade. Wir finden also die sämmtlichen in π gelegenen Axen, indem wir aus jedem Punkte der Geraden n_1 auf dessen Polar-Ebene eine Senkrechte fällen. Diese Polar-Ebenen bilden aber einen Büschel n, welcher zu der Punktreihe n_1 projectivisch ist; und daraus folgt, dass jene Senkrechten entweder alle durch einen Punkt gehen, oder eine Parabel umhüllen. Wir können nämlich die unendlich ferne Punktreihe der Ebene π projectivisch so auf den Ebenenbüschel n beziehen, dass jede Ebene des Büschels senkrecht steht zu der Richtung, in welcher der entsprechende unendlich ferne Punkt liegt. Damit ist aber die unendlich ferne Punktreihe auch auf die Punktreihe n_1 projectivisch bezogen, und erzeugt mit derselben jene Schaar von Senkrechten; und diese berühren im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung,

zu deren Tangenten auch n_1 und die unendlich ferne Gerade gehören und welche daher eine Parabel ist. Diejenigen Axen, welche durch den Punkt P gehen, sind die Polaren von den in π gelegenen Axen; und wenn letztere eine Parabel umhüllen, so müssen die ersteren auf einer Kegelfläche II. Ordnung liegen. Mit Berücksichtigung des Vorhergehenden können wir daher die Sätze aufstellen:

„Die Axen, welche in einer gegebenen Ebene π liegen, um„hüllen eine Parabel; dieselbe wird auch von den Geraden „berührt, in welchen π die Symmetrie-Ebenen der Fläche II. Ord„nung schneidet."

„Die Axen, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, „bilden eine Kegelfläche II. Ordnung; dieselbe geht durch die „Normalen, welche aus P auf die Symmetrie-Ebenen der „Fläche II. Ordnung gefällt werden können, sowie durch einen „Durchmesser dieser Fläche."

Die Parabel kann jedoch, wie schon bei dem Beweise dieser Sätze hervorgehoben wurde, sich auf Punkte reduciren, so dass wir statt ihrer Tangenten Strahlenbüschel I. Ordnung erhalten; und ebenso kann die Kegelfläche P in Strahlenbüschel I. Ordnung zerfallen. Dieses muss für jeden Punkt P und jede Ebene π z. B. dann eintreten, wenn die Fläche II. Ordnung eine Rotationsfläche ist, weil alsdann unendlich viele Symmetrie-Ebenen vorhanden sind, die sich in einer Hauptaxe h schneiden. Den bisherigen Sätzen zufolge ist in diesem Falle jede Gerade, welche entweder mit der Rotationsaxe h in einer Ebene liegt oder dieselbe rechtwinklig kreuzt, eine Axe. Wir wollen hinfort die Rotationsflächen II. Ordnung von unserer Untersuchung ausschliessen.

Werden auf einer beliebigen Axe, die weder ein Durchmesser der Fläche II. Ordnung, noch zu einer Symmetrie-Ebene rechtwinklig ist, zwei eigentliche, in keiner Symmetrie-Ebene liegende Punkte M und N angenommen, so schneiden sich die Axenkegel, deren Mittelpunkte M und N sind, in der Geraden $\overline{MN}$ und einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung. Diese Curve k^3 enthält drei unendlich ferne Punkte, nämlich die Pole der Symmetrie-Ebenen und unendlich fernen Punkte der Hauptaxen; denn die Geraden, welche aus M und N normal zu den Symmetrie-Ebenen oder auch parallel zu den Hauptaxen gezogen werden können, sind ebenfalls Axen und schneiden sich paarweise in jenen drei unendlich fernen Punkten. Wenn die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt besitzt,

so ist auch dieser auf der Raumcurve dritter Ordnung enthalten. Jeder dritte Axenkegel, dessen Mittelpunkt O auf der Curve k^3 liegt, muss durch dieselbe gehen, weil er die fünf Axen enthält, durch welche O mit M, N und jenen drei unendlich fernen Curvenpunkten verbunden wird. Also:

„Es giebt unendlich viele Raumcurven dritter Ordnung, deren „Tangenten und Sehnen aus lauter Axen der Fläche II. Ord„nung bestehen. Alle diese Curven haben drei unendlich ferne „Punkte, nämlich die Pole der Symmetrie-Ebenen und unend„lich fernen Punkte der Hauptaxen, mit einander gemein, so„wie den Mittelpunkt der Fläche II. Ordnung, falls ein solcher „vorhanden ist."

Sind irgend zwei dieser Raumcurven dritter Ordnung gegeben, also auch unendlich viele Axenkegel, die nicht alle durch eine und dieselbe Raumcurve hindurchgehen, so erzeugen diese Axenkegel unendlich viele andere solche Raumcurven. Durch dieselben sind in jeder beliebig gegebenen Ebene unzählige Axen bestimmt, also auch der Büschel II. Ordnung, welchen alle in der Ebene gelegenen Axen bilden; die sämmtlichen Axen der Fläche II. Ordnung sind folglich durch jene zwei Raumcurven dritter Ordnung völlig bestimmt. Liegen die beiden Curven auf einem und demselben Axenkegel, so können sie als Ordnungscurven eines durch collineare räumliche Systeme erzeugten Strahlencomplexes betrachtet werden; dieser Complex aber muss nach dem Vorhergehenden alle Axen der Fläche II. Ordnung enthalten und besteht aus diesen Axen. Also:

Die Axen einer Fläche II. Ordnung bilden einen Strahlencomplex, welcher auch durch collineare räumliche Systeme erzeugt werden kann. Hat die Fläche II. Ordnung einen Mittelpunkt, so bildet dieser mit den unendlich fernen Punkten der drei Hauptaxen das Haupttetraeder des Strahlencomplexes; ist dagegen die Fläche II. Ordnung ein Paraboloid, so besitzt der Strahlencomplex nur drei Hauptpunkte, nämlich die unendlich fernen Pole beider Symmetrie-Ebenen und den unendlich fernen Punkt der Hauptaxe, sowie drei Haupt-Ebenen, nämlich die Symmetrie-Ebenen und die unendlich ferne Ebene.

Die Sätze des achtzehnten Vortrages über Strahlencomplexe zweiten Grades gelten also auch für den Axencomplex einer Fläche II. Ordnung; so z. B. der Satz, dass die Complexstrahlen, welche durch einen Punkt P gehen oder in einer Ebene π liegen, nur

dann zwei Strahlenbüschel I. Ordnung bilden, wenn P in einer Hauptebene liegt, oder π durch einen Hauptpunkt geht. Wir wollen jedoch für den Axencomplex einer Fläche zweiter Ordnung die einzelnen Fälle dieses Satzes ihrer Wichtigkeit wegen noch einmal direkt beweisen.

„Die Axen, welche auf einer Durchmesser-Ebene der Fläche „II. Ordnung liegen, bilden einen Durchmesserbüschel und „einen Büschel paralleler Strahlen; und umgekehrt: Alle Axen, „welche eine gegebene Richtung haben, liegen in einer Durch- „messer-Ebene der Fläche II. Ordnung."

Ist nämlich π eine Durchmesser-Ebene, so liegt ihr Pol P unendlich fern in der Richtung der zu π conjugirten Sehnen. Die Parallelen, welche normal zu dieser Richtung in π gezogen werden können, sind Axen der Fläche II. Ordnung, und ebenso deren Polaren, welche durch P gehen und in einer zweiten Durchmesser-Ebene liegen. Beiläufig folgt:

„Die Axen, welche durch irgend zwei auf einem Durch- „messer gelegene Punkte gehen, sind paarweise parallel; die „beiden Kegelflächen, auf welchen sie liegen, berühren sich in „jenem Durchmesser und gehen durch denselben unendlich „fernen Kegelschnitt."

„Die Parabeln, welche von allen in parallelen Ebenen ge- „legenen Axen eingehüllt werden, sind Schnitte einer Kegel- „oder Cylinderfläche, deren Strahlen aus Durchmessern der „gegebenen Fläche II. Ordnung bestehen."

Wenn ein Punkt P in einer Symmetrie-Ebene γ der Fläche II. Ordnung liegt, so ist jeder durch P in γ gezogene Strahl eine Axe der Fläche; die Kegelfläche, auf welcher alle durch P gehenden Axen liegen, zerfällt demnach in zwei Strahlenbüschel. Der eine dieser Büschel liegt in γ, der andere geht durch diejenige Axe, welche im Punkte P zu der Symmetrie-Ebene γ normal ist. Also:

„Die Axen, welche durch irgend einen Punkt einer Sym- „metrie-Ebene γ gehen, bilden zwei Strahlenbüschel, von denen „der eine in γ liegt, der andere in einer zu γ normalen Ebene."

Aus diesem Satze folgt:

„Ist die Gerade n senkrecht zu der Symmetrie-Ebene γ, so „bilden diejenigen Axen, welche von n geschnitten werden, „Kegelflächen II. Ordnung, deren Mittelpunkte in n liegen und „welche mit γ eine und dieselbe gleichseitige Hyperbel gemein „haben."

Nämlich eine beliebige dieser Kegelflächen hat mit γ eine Hyperbel gemein, welche durch den Schnittpunkt von n und γ und durch den Mittelpunkt der Fläche II. Ordnung hindurchgeht, wenn ein solcher vorhanden ist, und von deren Asymptoten die eine senkrecht, die andere parallel zu einer von γ verschiedenen Symmetrie-Ebene ist. Nach dem vorhergehenden Satze aber ist jede Gerade, welche einen Punkt der Hyperbel mit einem Punkte der Geraden n verbindet, ebenfalls eine Axe der Fläche II. Ordnung. Ebenso folgt der Satz:

„Diejenigen Axen, welche eine Symmetrie-Ebene γ in einer „auf derselben gelegenen Geraden g schneiden, berühren entweder einen parabolischen Cylinder, welcher zu γ senkrecht „ist; oder sie schneiden, wenn g zu einer zweiten Symmetrie-„Ebene γ_1 normal ist, eine in γ_1 gelegene und zu γ senkrechte „Gerade g_1."

Im letzteren Falle gehören alle Geraden, welche g und g_1 schneiden, zu dem Axencomplex. Fällt man von den Punkten, in welchen irgend eine Axe a der Fläche zweiter Ordnung die beiden Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 schneidet, Perpendikel auf die Hauptaxe $\overline{\gamma\gamma_1}$, so erhält man zwei zusammengehörige Gerade g und g_1. Dieselben beschreiben zwei projectivische Parallelstrahlenbüschel in γ und γ_1, wenn die Axe a in einer Durchmesser-Ebene einen Büschel paralleler Axen beschreibt; und zwar stehen die Abstände der Geraden g, g_1 vom Mittelpunkte der Fläche zweiter Ordnung in constantem Verhältniss zu einander, und wenn kein Mittelpunkt existirt, so haben g und g_1 von einander einen unveränderlichen Abstand. Also:

„Fällt man von den Punkten, in welchen die einzelnen „Axen einer Fläche zweiter Ordnung von zwei Symmetrie-„Ebenen γ, γ_1 geschnitten werden, Perpendikel auf die Haupt-„axe $\overline{\gamma\gamma_1}$, durch welche γ und γ_1 gehen, so ist im Falle eines „Ellipsoides oder Hyperboloides das Verhältniss der Abstände „dieser beiden Perpendikel vom Mittelpunkte der Fläche ein „constantes, im Falle eines Paraboloides aber begrenzen die „beiden Perpendikel auf der Hauptaxe $\overline{\gamma\gamma_1}$ eine Strecke von „constanter Länge."

Aus diesem Satze und ebenso aus dem früher bewiesenen, dass die Strahlen eines tetraedralen Complexes von den Ebenen des Haupttetraeders (welches im vorliegenden Falle von den Sym-

metrie-Ebenen und der unendlich fernen Ebene gebildet wird) in projectivischen Punktreihen geschnitten werden, ergiebt sich:

„Die Abschnitte, welche auf den Axen eines Ellipsoides, „eines Hyperboloides oder einer Kegelfläche II. Ordnung von „den drei Symmetrie-Ebenen der Fläche begrenzt werden, „stehen in constantem Verhältniss zu einander.“

Sind von einer Fläche II. Ordnung gegeben die Symmetrie-Ebenen und eine beliebige Axe a, so kann man alle übrigen Axen leicht construiren. Man bringe die Axe a zum Durchschnitt mit zwei Symmetrie-Ebenen γ, γ_1 und fälle von den Schnittpunkten zwei Perpendikel g, g_1 auf die Hauptaxe $\overline{\gamma\gamma_1}$; dann gehören alle Geraden, welche g und g_1 schneiden, zu den Axen der Fläche. Eine beliebige Durchmesser-Ebene δ enthält allemal eine dieser, die Linien g und g_1 schneidenden Axen; die übrigen in δ liegenden Axen sind theils zu dieser einen Axe parallel, theils bilden sie einen Durchmesserbüschel, können also sämmtlich construirt werden. Da nun jede Axe der Fläche auf irgend einer Durchmesser-Ebene liegt, so kann man zu ihr auf diese Art gelangen. Also:

„Der Axencomplex einer Fläche zweiter Ordnung ist völlig „bestimmt, wenn die Symmetrie-Ebenen der Flächen gegeben „sind und irgend eine Axe a, die mit keiner Hauptaxe in „einer Ebene liegt.“

Wir können nunmehr den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Zu einem gegebenen Axencomplexe lassen sich unendlich viele Flächen II. Ordnung construiren; oder es giebt unendlich viele Flächen II. Ordnung, welche dieselben Axen besitzen wie eine gegebene.

Der Axencomplex sei gegeben durch die Symmetrie-Ebenen und eine beliebig angenommene Axe a, wie im vorigen Satze. Wir errichten in irgend einem Punkte S von a eine zu a senkrechte Ebene σ, und construiren eine Fläche II. Ordnung, welche die gegebenen Symmetrie-Ebenen besitzt, und von der Ebene σ im Punkte S berührt wird. Da die Gerade a eine Normale dieser Fläche ist, so gehört sie nebst jedem anderen Strahle des gegebenen Axencomplexes zu den Axen der Fläche. Und weil der Punkt S ganz beliebig auf a gewählt ist, und wir ausserdem statt a irgend eine andere Axe des Complexes bei dieser Construction benutzen können, so ist der Satz bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass die Construction jener Fläche II. Ordnung möglich ist.

Sind drei Symmetrie-Ebenen vorhanden, so bilden dieselben mit der unendlich fernen Ebene ein Pol-Tetraeder der gesuchten Fläche; und letztere ist völlig bestimmt als Ordnungsfläche des räumlichen Polarsystems, in welchem ausser jenem Pol-Tetraeder noch der Pol S der Ebene σ gegeben ist (vergl. Seite 68). Die Fläche II. Ordnung geht durch die acht Eckpunkte des rechtwinkligen Parallelepipedon, dessen Seitenflächen zu den Symmetrie-Ebenen parallel laufen, dessen Diagonalen im Mittelpunkte M der Fläche sich halbiren und von welchem der Punkt S ein Eckpunkt ist. Die drei durch S gehenden Seitenflächen des Parallelepipedon schneiden die Fläche in Curven II. Ordnung, von welchen wir ausser S noch je drei Punkte und die in σ liegende Tangente von S kennen. Diese Curven sind also völlig bestimmt, und mit ihrer Hülfe kann jeder Kegelschnitt construirt werden, welchen irgend eine Ebene mit der Fläche II. Ordnung gemein hat.

Sind dagegen nur zwei Symmetrie-Ebenen und eine Hauptaxe vorhanden, so ist die gesuchte Fläche ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid. Alsdann schneidet jede der beiden Ebenen, welche durch S parallel zu einer der Symmetrie-Ebenen gelegt werden können, die Fläche in einer Parabel, deren Axe in der zweiten Symmetrie-Ebene liegt, und von welcher ausserdem der Punkt S und dessen in σ liegende Tangente bekannt sind. Jede dieser beiden Parabeln kann also construirt werden. Wir bestimmen ferner einen Punkt S_1 so, dass die Gerade SS_1 auf der Hauptaxe senkrecht steht und von dieser halbirt wird; dann liegt auch S_1 auf der gesuchten Fläche. Durch S_1 und die beiden Parabeln, welche in S und in dem unendlich fernen Punkte der Hauptaxe sich schneiden, kann aber (Seite 32) eine einzige Fläche II. Ordnung gelegt werden. Dieselbe genügt allen Bedingungen und ist ein Paraboloid, weil sie von der unendlich fernen Ebene in dem genannten Punkte der Hauptaxe berührt wird.

Von den Flächen II. Ordnung, welche einen gegebenen Axencomplex mit einander gemein haben, gehen durch jeden Punkt S des Raumes unendlich viele; denn jede von den Axen, welche durch S gehen und wie wir wissen eine Kegelfläche II. Ordnung bilden, steht im Punkte S zu einer jener Flächen normal. Die Berührungs-Ebenen dieser Flächen II. Ordnung im Punkte S umhüllen deshalb eine Kegelfläche II. Ordnung.

„Die Pole einer beliebigen Ebene ε in Bezug auf alle „Flächen II. Ordnung, die einen gegebenen Axencomplex mit

„einander gemein haben, liegen in einer zu ε senkrechten Durch-
„messer-Ebene. Die Flächen werden von der Ebene ε in
„Curven II. Ordnung geschnitten, deren Axen eine Parabel
„umhüllen und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen,
„nämlich auf der Directrix der Parabel."

Nämlich jede Senkrechte, welche auf die Ebene ε aus einem ihrer Pole gefällt werden kann, ist eine Axe der Flächen II. Ordnung und da alle diese Senkrechten zu einander parallel sind, so liegen sie in einer Durchmesser-Ebene (Seite 170). Dieselbe ist zu ε conjugirt hinsichtlich aller jener Flächen II. Ordnung und auf ihrer Schnittlinie mit ε liegen deshalb die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche ε mit den Flächen II. Ordnung gemein hat. Da die Axen jedes solchen Kegelschnittes sich im Mittelpunkte rechtwinklig schneiden und ausserdem eine Parabel berühren (Seite 168), so folgt der letzte Theil des Satzes auch unmittelbar aus der Eigenschaft der Parabel (I. Abth. Seite 133):

„Zwei Parabeltangenten stehen senkrecht auf einander, wenn
„ihr Schnittpunkt auf der Directrix liegt."

Zweiundzwanzigster Vortrag.

Aehnliche, concentrisch und ähnlich liegende Flächen zweiter Ordnung und deren Normalen.

Wir wollen jetzt von den Flächen II. Ordnung, denen ein gegebener Axencomplex zukommt, gewisse einfache Gruppen betrachten. Wir schicken folgenden Satz voraus:

„Sind von einer Fläche II. Ordnung die Symmetrie-Ebenen
„und derjenige Durchmesser gegeben, welcher einer beliebig
„angenommenen, zu keiner Hauptaxe parallelen oder senkrechten
„Ebene ε conjugirt ist, so ist dadurch der Axencomplex der
„Fläche sowie der Mittelpunkt und die Axen jedes auf der
„Fläche liegenden Kegelschnittes völlig bestimmt."

Der Pol der Ebene ε liegt auf dem ihr conjugirten Durchmesser; und weil die Senkrechte, welche aus diesem Pol auf ε gefällt werden kann, eine Axe der Fläche ist, so muss (nach Seite 170)

jede zu ε senkrechte Gerade, welche jenen Durchmesser schneidet, eine Axe sein. Der Axencomplex ist daher völlig bestimmt (Seite 172). Die Mittelpunkte aller Curven, in welchen die Fläche II. Ordnung durch parallele Ebenen geschnitten wird, liegen auf einem, den Ebenen conjugirten Durchmesser. Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, brauchen wir also nur noch zu zeigen, dass zu jeder durch einen gegebenen Punkt P gelegten Ebene der conjugirte Durchmesser eindeutig bestimmt ist; denn diejenigen beiden Axen einer Ebene, welche auf dem ihr conjugirten Durchmesser sich schneiden, sind zugleich die Axen des in der Ebene gelegenen Kegelschnittes der Fläche II. Ordnung und als Strahlen des Axencomplexes ebenfalls bekannt.

Nun ist zu jeder Hauptaxe der Fläche II. Ordnung diejenige Ebene des Punktes P conjugirt, welche auf der Hauptaxe senkrecht steht; und jeder Ebene von P, welche zu einer Symmetrie-Ebene parallel läuft, ist derjenige Durchmesser conjugirt, welcher zu dieser Symmetrie-Ebene rechtwinklig ist (und also im Falle des Paraboloides unendlich fern liegt in der anderen Symmetrie-Ebene). Für die zu ε parallele Ebene von P ist der conjugirte Durchmesser ebenfalls bekannt, und somit kennen wir bereits für vier durch P gehende Ebenen, von denen keine drei in einer und derselben Geraden sich schneiden, die conjugirten Durchmesser. Bekanntlich ist aber der Ebenenbündel P reciprok auf den Durchmesserbündel bezogen, wenn jeder Ebene von P der ihr conjugirte Durchmesser zugewiesen wird; und da wir zu vier Ebenen von P die conjugirten Durchmesser schon kennen, so ist die reciproke Verwandtschaft beider Bündel völlig festgestellt. Also kann wirklich zu jeder Ebene von P der conjugirte Durchmesser durch lineare Constructionen gefunden werden, und der Satz ist bewiesen.

Seien a und a_1 zwei parallele Axen des Complexes und mögen dieselben von einem beliebigen Durchmesser in den resp. Punkten A und A_1 geschnitten werden. Wir können dann zwei Flächen II. Ordnung construiren, denen der gegebene Axencomplex zugehört und auf welchen die resp. Axen a und a_1 in den Punkten A und A_1 normal stehen. Die Berührungs-Ebenen in A und A_1 sind also parallel und dem nämlichen Durchmesser $\overline{AA_1}$ conjugirt. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass alsdann je zwei Durchmesser, welche parallelen Ebenen in Bezug auf die beide Flächen II. Ordnung conjugirt sind, zusammenfallen müssen. Wir wollen die beiden Flächen zwei „ähnliche, concentrisch und ähnlich

liegende", oder kürzer „coaxiale und homothetische" Flächen II. Ordnung nennen, und können die soeben gefundene Eigenschaft derselben wie folgt aussprechen:

„Die Mittelpunkte und Axen der Kegelschnitte, in welchen „coaxiale und homothetische Flächen II. Ordnung von irgend „einer Ebene geschnitten werden, fallen zusammen. Die Be-„rührungs-Ebenen der Punkte, in welchen die Flächen von „irgend einem Durchmesser geschnitten werden, sind parallel. „Die Halbirungspunkte paralleler Sehnen der Flächen liegen „alle in einer und derselben Durchmesser-Ebene."

Zwei dieser parallelen Sehnen gehen durch A und A_1 und schneiden die Flächen II. Ordnung zum zweiten Male in den resp. Punkten B und B_1. Und da nicht blos A und A_1, sondern auch die Mittelpunkte der Sehnen AB und A_1B_1 auf einem Durchmesser liegen, so muss auch durch B und B_1 ein Durchmesser hindurchgehen. Haben die Flächen II. Ordnung einen Mittelpunkt M, so schliessen wir aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AMB und A_1MB_1 die Proportion:

$$MA : MA_1 = MB : MB_1; \text{ d. h.:}$$

„Die Durchmesser ähnlicher, concentrisch und ähnlich „liegender Ellipsoide oder Hyperboloide werden von den „Flächen proportional getheilt. Coaxiale und homothetische „Hyperboloide haben deshalb denselben Asymptotenkegel."

Sind dagegen die Flächen II. Ordnung Paraboloide, so sind die Durchmesser AA_1 und BB_1 parallel und das Viereck $AA_1\ BB_1$ ist ein Parallelogramm; die Strecken AA_1 und BB_1 sind folglich gleich, und es ergiebt sich:

„Zwei coaxiale und homothetische Paraboloide können mit „einander zur Deckung gebracht werden, indem das eine in „der Richtung der Durchmesser (um die Strecke AA_1) ver-„schoben wird."

Zwei concentrische Hyperboloide, deren Asymptotenkegel zusammenfallen, haben alle ihre Axen mit einander gemein und werden von jeder Ebene in concentrischen Curven mit gemeinschaftlichen Axen geschnitten. Denn durch den Asymptotenkegel ist zu jeder Ebene ε des Raumes der conjugirte Durchmesser bestimmt, dadurch aber auch der Mittelpunkt von ε und sämmtliche zu ε normale Axen. Ein Hyperboloid ist völlig bestimmt, sobald der Asymptotenkegel und ausserhalb oder innerhalb des-

selben ein Punkt P des Hyperboloides gegeben ist. Denn jede durch P und den Mittelpunkt gehende Ebene, welche den Asymptotenkegel in zwei Strahlen a, b schneidet, hat mit dem Hyperboloid eine Hyperbel gemein, die durch P geht und von welcher a und b die Asymptoten sind; jede solche Hyperbel kann leicht construirt werden.

Werden zu einer Fläche II. Ordnung alle möglichen coaxialen und homothetischen Flächen construirt, so geht von denselben eine durch jeden Punkt des Raumes, falls die gegebene Fläche ein Ellipsoid oder ein Paraboloid ist; ist sie dagegen ein einfaches oder zweifaches Hyperboloid, so geht durch jeden Punkt ausserhalb resp. innerhalb des Asymptotenkegels eine jener Flächen. Wir wollen im letzteren Falle alle übrigen Hyperboloide, die mit dem ersteren den Asymptotenkegel gemein haben, hinzufügen, so dass wir eine Schaar von ähnlichen einfachen und eine Schaar von ähnlichen zweifachen Hyperboloiden erhalten. Die sämmtlichen Flächen II. Ordnung, die wir so zu einer gegebenen construiren können, und von denen durch jeden eigentlichen Punkt nur eine hindurchgeht, wollen wir einen „Büschel coaxialer und homothetischer Flächen II. Ordnung“ nennen. Jede Ebene wird von einer einzigen Fläche des Büschels berührt, und zwar im gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Curven II. Ordnung, in welchen die übrigen Flächen von der Ebene geschnitten werden; denn die Pole der Ebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels liegen auf dem zu der Ebene conjugirten Durchmesser. Die Polar-Ebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen des Büschels sind parallel und einem und demselben Durchmesser conjugirt. Jede Axe steht zu einer der Flächen in einem Punkte F normal; und dieser Fusspunkt F wird construirt, indem die Axe mit demjenigen Durchmesser zum Durchschnitt gebracht wird, welchem die zu der Axe normalen Ebenen conjugirt sind (Seite 170 und 175). Die Axen, welche in einer gegebenen Ebene liegen, bilden nach früheren Sätzen einen parabolischen Büschel II. Ordnung oder zwei Büschel I. Ordnung; also:

„Die Normalen, welche in einer beliebigen Ebene π an „einen Büschel coaxialer und homothetischer Flächen II. Ord- „nung gezogen werden können, berühren entweder eine Parabel, „oder sie bilden einen gewöhnlichen und einen Parallel- „Strahlenbüschel. Die Fusspunkte dieser Normalen liegen in „einer Geraden.“

Nur wenn π eine Symmetrie-Ebene ist, gilt der Satz nicht; sein letzter Theil kann folgendermassen bewiesen werden. Alle Ebenen, welche zu den in π liegenden Axen senkrecht stehen, sind parallel zu den Ebenen eines Ebenenbüschels I. Ordnung; die ihnen conjugirten Durchmesser liegen deshalb in einer Ebene und schneiden die Ebene π in den Punkten einer Geraden, welche die Fusspunkte aller jener Normalen enthält.

Weil eine Gerade mit keiner Fläche des Büschels mehr als zwei Punkte gemein haben kann, ohne ganz auf derselben zu liegen, so folgt:

„In einer beliebigen Ebene π liegen im Allgemeinen und „höchstens zwei Normalen einer Fläche II. Ordnung."

Eine Ausnahme machen nur die Symmetrie-Ebenen, und bei den Kegelflächen II. Ordnung die Normal-Ebenen, welche in den Strahlen der Kegelfläche die zugehörigen Berührungs-Ebenen rechtwinklig schneiden. Sucht man zu den Geraden, welche auf der Ebene π senkrecht stehen, die conjugirte Durchmesser-Ebene und bringt diese mit π zum Durchschnitt, so geht die Schnittlinie durch die Fusspunkte der beiden in π gelegenen Normalen der Fläche II. Ordnung. Diese Punkte sind demnach leicht zu construiren.

„Die Normalen, welche aus einem beliebigen Punkte P an „einen Büschel ähnlicher, concentrisch und ähnlich liegender „Flächen II. Ordnung gezogen werden können, bilden eine „Kegelfläche II. Ordnung (Seite 168), wenn P weder unendlich „fern, noch auf einer Symmetrie-Ebene liegt; ihre Fusspunkte „bilden eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch P und „durch drei unendlich ferne Punkte hindurchgeht, nämlich „durch die Pole der Symmetrie-Ebenen und die unendlich „fernen Punkte der Hauptaxen, und welche auch den Mittel„punkt der Flächen II. Ordnung enthält, wenn ein solcher „vorhanden ist."

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich auf folgendem Wege. Die Ebenen, welche zu den Strahlen der Kegelfläche P senkrecht stehen, sind parallel zu den Berührungs-Ebenen einer zweiten Kegelfläche II. Ordnung; beschreibt man nämlich um P als Mittelpunkt eine Kugelfläche, so ist jedem Strahle von P eine zu ihm senkrechte Durchmesser-Ebene der Kugel conjugirt, und daher muss, weil der Durchmesserbündel P ein polarer ist, der Kegelfläche P ein ihm projectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung con-

jugirt sein, welcher jene zweite Kegelfläche einhüllt. Diejenigen Durchmesser der ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen II. Ordnung, welche zu den Ebenen jenes Büschels II. Ordnung conjugirt sind, bilden somit gleichfalls eine Kegel- oder Cylinderfläche M II. Ordnung, welche mit dem Normalenkegel P die im Satze genannte Raumcurve dritter Ordnung erzeugt. Die Kegelflächen M und P haben nämlich den durch P gehenden Durchmesser $\overline{MP}$ mit einander gemein; denn alle Axen des Flächenbüschels, welche auf einer zu $\overline{MP}$ conjugirten Ebene senkrecht stehen, schneiden den Durchmesser $\overline{MP}$ und eine derselben gehört sonach der Kegelfläche P an. Da nun jede Normale n in ihrem Fusspunkte von demjenigen Durchmesser geschnitten wird, welcher allen zu n rechtwinkligen Ebenen conjugirt ist, so liegen die Fusspunkte aller durch P gehenden Normalen auf der Raumcurve dritter Ordnung, welche die Kegelflächen M und P noch ausser dem Durchmesser $\overline{MP}$ mit einander gemein haben. Beide Kegelflächen gehen aber durch die drei im Satze genannten unendlich fernen Punkte; also auch ihre Schnittcurve.

Mit einer einzelnen Fläche des gegebenen Büschels hat die Raumcurve dritter Ordnung höchstens sechs Punkte gemein (Seite 151), und im Falle des Paraboloides ist der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe einer von diesen sechs Punkten; also:

„Aus keinem Punkte P können mehr als sechs Normalen „an eine Fläche II. Ordnung gezogen werden; im Fall des „Paraboloides ist eine dieser Normalen ein Durchmesser und „ihr Fusspunkt der unendlich ferne Punkt des Paraboloides.“

Dieser Satz und die vorhergehenden gelten nicht für Rotations-Flächen II. Ordnung, welche im vorigen Vortrage ausdrücklich ausgeschlossen wurden.

Wir können aus den noch übrigen Sätzen des letzten Vortrages die folgenden über die Normalen von Flächen II. Ordnung ableiten:

„Sind von einem Büschel coaxialer und homothetischer „Flächen II. Ordnung die Symmetrie-Ebenen und eine beliebige „Normale gegeben, so sind dadurch alle Normalen der Flächen „bestimmt. Die Normalen, welche eine Gerade g schneiden, „liegen so zu einander, dass alle durch einen beliebigen „Punkt P von g gehenden Normalen eine Kegelfläche II. Ord„nung bilden, und alle in einer beliebigen Ebene π von g „liegenden Normalen eine Parabel umhüllen. Nur wenn P

12*

„unendlich fern oder in einer Symmetrie-Ebene liegt, zerfällt „die Kegelfläche II. Ordnung in zwei Strahlenbüschel I. Ord- „nung; und ebenso erhalten wir in π statt der Parabel-Tan- „genten zwei Strahlenbüschel I. Ordnung, wenn π eine Durch- „messer-Ebene der Flächen ist oder zu einer Symmetrie-Ebene „senkrecht steht. Die Fusspunkte aller Normalen, welche die „Gerade g schneiden, erfüllen eine Kegelfläche oder eine Regel- „fläche II. Ordnung, je nachdem g selbst auf einer Fläche des „Büschels senkrecht steht oder nicht; wenn jedoch g unendlich „fern liegt, so erfüllen jene Fusspunkte eine Durchmesser- „Ebene, und wenn g in einer Symmetrie-Ebene liegt, so sind „jene Fusspunkte theils in dieser, theils in einer zu der Sym- „metrie-Ebene senkrechten Ebene enthalten."

Der letzte Theil des Satzes folgt daraus, dass der geometrische Ort der Fusspunkte mit jeder durch g gelegten Ebene π eine Gerade gemein hat und mit jedem Axenkegel P, dessen Mittelpunkt auf g liegt, eine Raumcurve dritter Ordnung. Die Ausführung des Beweises überlasse ich dem Leser.

Dreiundzwanzigster Vortrag.

Fusspunkte der Axen einer Fläche II. Ordnung. Confocale Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen II. Ordnung, welche denselben Axencomplex besitzen, können nach gewissen Flächenschaaren gruppirt werden, die von noch grösserem Interesse sind, als die ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Flächen. Wir gelangen zu denselben und zu ihren wichtigsten Eigenschaften durch die folgende Untersuchung, von welcher wir jedoch die Rotationsflächen und die Kegelflächen II. Ordnung von vorn herein ausschliessen.

Jeder Axe a einer gegebenen Fläche II. Ordnung ist eine einzige zu ihr senkrechte Ebene conjugirt; nur die Hauptaxen der Fläche machen eine Ausnahme, indem sie auf jeder ihnen conjugirten Ebene senkrecht stehen. Der Punkt nun, in welchem eine Axe a von der ihr conjugirten Ebene rechtwinklig geschnitten

wird, ist besonders bemerkenswerth. Ist z. B. die Axe a eine Normale der Fläche II. Ordnung, so fällt dieser Punkt zusammen mit dem Fusspunkte der Normalen; und wir wollen ihn deshalb auch in jedem anderen Falle den „Fusspunkt" der Axe a nennen. Wir erhalten ihn auch, indem wir die Polare der Axe a auf eine beliebig durch a gelegte Ebene ε senkrecht projiciren und den Schnittpunkt dieser Projection mit der Axe a aufsuchen; denn die projicirende Ebene steht senkrecht auf a, weil sie ausser der Polare noch andere zu a senkrechte Gerade enthält, die zu der Ebene ε normal sind und die Polare schneiden. Auch die Projection der Polare bildet mit a rechte Winkel.

Jeder Punkt des Raumes ist der Fusspunkt von drei zu einander rechtwinkligen Axen.

Dieselben sind die Hauptaxen einer der Fläche II. Ordnung umschriebenen Kegelfläche, oder auch eines polaren Strahlenbündels, welcher dem von der Fläche II. Ordnung bestimmten räumlichen Polarsystem angehört.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche auf einer Symmetrie-„Ebene senkrecht stehen, liegen in dieser Ebene; jeder Punkt „einer Hauptaxe kann als Fusspunkt derselben angesehen „werden; der Fusspunkt eines beliebigen Durchmessers liegt „unendlich fern."

Dieses folgt aus der Definition des Fusspunktes einer Axe.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche nach einer gegebenen „Richtung gezogen werden können und folglich in einer Durch-„messer-Ebene δ liegen, sind im Allgemeinen auf einer gleich-„seitigen Hyperbel enthalten, deren Mittelpunkt mit demjenigen „der Fläche II. Ordnung zusammenfällt, und nur dann auf einer „Geraden, wenn die Fläche II. Ordnung ein Paraboloid ist."

Die Polaren dieser Axen bilden nämlich einen zweiten Parallel-Strahlenbüschel, welcher zu dem ersteren projectivisch ist, und wir erhalten den Fusspunkt jeder Axe, indem wir sie zum Durchschnitt bringen mit der senkrechten Projection ihrer Polare auf der Durchmesser-Ebene δ. Die Fusspunkte der parallelen Axen stellen sich sonach dar als Erzeugniss von zwei projectivischen und zu einander rechtwinkligen Parallel-Strahlenbüscheln, welche nur im Fall des Paraboloides ihren unendlich fernen Strahl entsprechend gemein haben und perspectivisch liegen, in jedem anderen Falle aber eine Curve II. Ordnung mit zwei unendlich fernen Punkten, nämlich jene gleichseitige Hyperbel erzeugen.

„Die Fusspunkte aller Axen, welche von einer Symmetrie-„Ebene γ in einem gegebenen Punkte P geschnitten werden „und also in einer zu γ senkrechten Ebene liegen, sind in „einem durch P gehenden Kreise enthalten, dessen Mittelpunkt „in γ liegt und dessen Ebene zu γ senkrecht ist."

Derselbe wird erzeugt durch den Axenbüschel P und durch den zu P projectivischen Strahlenbüschel, auf welchen die Polaren jener Axen sich in der Ebene des Büschels P senkrecht projiciren. Wird eine zweite Symmetrie-Ebene γ_1 von einer beliebigen Axe des Büschels P im Punkte P_1 geschnitten, so liegen die Fusspunkte aller übrigen Axen, welche in P_1 von γ_1 geschnitten werden, in einem zu γ_1 symmetrisch liegenden Kreise; derselbe reducirt sich auf den Punkt P_1, wenn in P_1 der Fusspunktenkreis des Büschels P von der Symmetrie-Ebene γ_1 geschnitten wird. Diesen besonderen Fall vorbehalten, können wir sagen:

„Werden zwei Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 von irgend einer „Axe in den resp. Punkten P und P_1 geschnitten, und sind g „und g_1 die Perpendikel, welche aus resp. P und P_1 auf die ge-„meinschaftliche Hauptaxe von γ und γ_1 gefällt werden können, „so ist jede Gerade des Raumes, welche einen Punkt von g „mit einem Punkte von g_1 verbindet, eine Axe (Seite 171). „Die Fusspunkte aller dieser Axen erfüllen eine durch g und „g_1 gehende Fläche, von welcher γ und γ_1 zwei Symmetrie-„Ebenen sind, und welche von jeder durch g oder g_1 gelegten „Ebene in dieser Geraden und einem Kreise geschnitten wird.*) „Diese Fusspunktenfläche ist demnach völlig bestimmt und „leicht construirbar, sobald ausser den Geraden g und g_1 noch „ein Punkt derselben bekannt ist."

Alle in einer beliebigen Ebene π liegenden Axen bilden einen Strahlenbüschel II. Ordnung und ihre Polaren eine Kegelfläche

---

*) Wird die Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, in dessen X-Axe die Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 sich schneiden, dessen Y-Axe mit g zusammenfällt, und dessen in γ_1 liegende Z-Axe folglich zu g_1 parallel ist, so lautet die Gleichung der Fläche:

$$(x^2 + z^2 - dx)(x - k) + xy^2 = o.$$

Hierin bezeichnet k den Abstand der Geraden g_1 von der Z-Axe, und d den Durchmesser des Kreises, in welchem die Ebene $\overline{XZ}$ oder γ_1 der Fläche begegnet. Jede zur X-Axe normale, also zu den Geraden g und g_1 parallele Ebene hat ebenfalls einen Kegelschnitt mit dieser Fläche gemein.

II. Ordnung; und da ein Strahl der letzteren senkrecht auf π steht, so bilden die Projectionen der Polaren auf der Ebene π einen Strahlenbüschel I. Ordnung, welcher zu dem Büschel II. Ordnung projectivisch ist und mit ihm die Fusspunkte aller in π liegenden Axen erzeugt. Der Mittelpunkt des Büschels I. Ordnung ist der Fusspunkt von zwei jener Axen. Also folgt (I. Abth. Seite 109):

„Die Fusspunkte aller in einer beliebigen Ebene liegenden „Axen erfüllen eine Curve dritter Ordnung, die einen Doppel-„punkt besitzt."

Die Fusspunkte aller durch einen beliebigen Punkt P gehenden Axen liegen auf einer Raumcurve, welche aus P durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird. Diese Curve muss durch den Punkt P dreimal gehen, weil P von drei zu einander rechtwinkligen Axen der Fusspunkt ist; sie berührt diese drei Axen in P. Jede vierte durch P gehende Axe enthält einen von P verschiedenen Punkt der Curve. Den Beweis, dass diese Curve mit keiner Ebene mehr als fünf Punkte gemein hat, also von der fünften Ordnung ist, muss ich der Kürze wegen unterdrücken.

Ist ein Axencomplex gegeben, sowie der Fusspunkt F *irgend einer Axe* a, *die weder auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht noch eine Hauptaxe schneidet, so ist dadurch der Fusspunkt jeder Axe völlig bestimmt.*

Wir construiren zwei Gerade g und g_1, welche die Axe a schneiden und von denen jede in einer der beiden Symmetrie-Ebenen γ und γ_1 liegt und zu der anderen senkrecht ist. Dann ist jede Gerade, welche sowohl von g als auch von g_1 geschnitten wird, eine Axe, und ihr Fusspunkt liegt auf einer durch g, g_1 und den Punkt F gehenden, leicht construirbaren Fläche (Seite 182) und ist durch diese bestimmt. Jede Durchmesser-Ebene enthält eine dieser Axen, und durch deren Fusspunkt ist die gleichseitige Hyperbel, auf welcher im Allgemeinen die Fusspunkte aller in der Durchmesser-Ebene liegenden Axen enthalten sind, bestimmt, weil die Asymptoten der Hyperbel zu diesen Axen beziehlich parallel und senkrecht sind, und durch den Mittelpunkt des Axencomplexes gehen. Im Fall ein Mittelpunkt vorhanden ist, können wir auf diese Weise zu jeder Axe den Fusspunkt construiren, indem wir durch die Axe eine Durchmesser-Ebene legen. Ist aber kein Mittelpunkt vorhanden, liegen also die Fusspunkte aller auf einer Durchmesser-Ebene enthaltenen Axen in einer Geraden, so müssen

wir von dieser noch einen zweiten Punkt construiren. Dazu verhelfen uns die beiden Axen b und c, welche im Punkte F auf der Axe a und auf einander senkrecht stehen, und gleich a für unendlich viele neue Axen uns die Fusspunkte liefern, weil ihr eigener Fusspunkt F bekannt ist. Also auch in diesem Falle ist für jede Axe der Fusspunkt construirbar, und der Satz allgemein bewiesen.

Unter den Flächen II. Ordnung, welchen ein gegebener Axencomplex zukommt, giebt es unendlich viele, für welche alle Axen die nämlichen Fusspunkte erhalten; wir nennen dieselben „confocale Flächen II. Ordnung". Jede Axe a steht in ihrem Fusspunkte F zu einer dieser confocalen Flächen normal, und die letztere ist hiedurch und durch die Symmetrie-Ebenen völlig bestimmt (Seite 172).

„Von der Schaar confocaler Flächen II. Ordnung, die wir „so erhalten, gehen drei Flächen durch jeden Punkt P des „Raumes; dieselben schneiden sich rechtwinklig in diesem „Punkte."

Denn P ist der Fusspunkt von drei zu einander rechtwinkligen Axen, und jede von diesen steht normal zu einer von jenen drei Flächen, muss also die übrigen beiden in P berühren. Wir können auch sagen:

„Zwei confocale Flächen II. Ordnung schneiden sich in „jedem ihrer gemeinschaftlichen Punkte P rechtwinklig."

Die Normalen der Flächen und die Tangente der Schnittcurve im Punkte P sind die drei zu einander rechtwinkligen Axen, welche P zum Fusspunkt haben. Die Schnittcurve liegt symmetrisch zu jeder Symmetrie-Ebene γ der Flächen und wird von derselben entweder gar nicht oder rechtwinklig geschnitten, weil γ in jedem Schnittpunkte auf beiden Flächen normal steht. Beiläufig bemerken wir, dass die Schnittlinie von zwei confocalen Flächen aus dem Pole jeder Symmetrie-Ebene durch eine Cylinderfläche II. Ordnung und aus dem Mittelpunkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt wird (Seite 150); denn diese Punkte sind Hauptpunkte desjenigen F^2-Büschels, welchem die beiden confocalen Flächen angehören. Wir können deshalb auch den Satz aufstellen:

„Wird die Schnittlinie von zwei confocalen Flächen II. Ord- „nung auf eine Symmetrie-Ebene der letzteren senkrecht proji-

„cirt, so erhält man einen Kegelschnitt, dessen Axen in den „übrigen Symmetrie-Ebenen liegen.“

Jeder Axe a ist hinsichtlich der confocalen Flächen diejenige Ebene π conjugirt, welche auf der Axe a in deren Fusspunkte F senkrecht steht. Umgekehrt ist jeder Ebene eine zu ihr senkrechte Axe conjugirt; und wir erhalten dieselbe, indem wir aus irgend einem Pole der Ebene auf diese eine Senkrechte fällen. Also:

„Die Polaren einer beliebigen Axe a in Bezug auf eine „Schaar confocaler Flächen II. Ordnung liegen in einer zu a „senkrechten Ebene π und umhüllen, da sie gleichfalls Axen „sind, eine Parabel. Die Pole einer beliebigen Ebene liegen „auf einer zu ihr senkrechten Axe, in deren Fusspunkt die „Ebene von einer der confocalen Flächen berührt wird.“

Der Strahlencomplex, welchen je zwei der confocalen Flächen mit einander bestimmen, besteht aus den Axen der Flächen, weil die Polaren jeder Axe sich schneiden; und es ergiebt sich (Seite 148):

Die Schaar confocaler Flächen II. Ordnung ist ein besonderer Fall der Φ^2-Schaar.

Alle für Φ^2-Schaaren gefundenen Sätze gelten also auch für die Schaar confocaler Flächen. So müssen u. A. die Polar-Ebenen eines Punktes hinsichtlich der confocalen Flächen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung bilden.

Da die Pole einer Ebene in Bezug auf confocale Flächen zweiter Ordnung alle in einer zu der Ebene normalen Axe liegen, so ergiebt sich:

„Wenn zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen conjugirt „sind in Bezug auf irgend eine Fläche F^2 zweiter Ordnung, „so sind sie auch conjugirt bezüglich aller zu F^2 confocalen „Flächen zweiter Ordnung.“

Wir wollen nun die Axe eines jeden Ebenenbüschels, von welchem je zwei zu einander rechtwinklige Ebenen conjugirt sind in Bezug auf F^2, eine „Focalaxe“ der Fläche F^2 nennen. Dann folgt aus dem letzten Satze ohne Weiteres:

„Jede Focalaxe einer Fläche F^2 zweiter Ordnung ist eine „gemeinschaftliche Focalaxe von allen zu F^2 confocalen Flächen „zweiter Ordnung.“

Durch jeden Punkt P gehen zwei reelle Focalaxen der confocalen Flächen, nämlich die Focalaxen des Tangentenkegels,

welcher irgend einer der confocalen Flächen aus dem Punkte P umschrieben wird; diese beiden Focalaxen fallen nur dann zusammen, wenn jener Kegel ein Rotationskegel ist (I. Abth. Seite 154).

„Die Tangentenkegel, welche confocalen Flächen zweiter „Ordnung aus irgend einem Punkte P umschrieben werden „können, sind demnach confocal, d. h. sie haben gemein„schaftliche Focalaxen."

Die Ebene π dieser beiden Focalaxen f, f' ist zu der ihr conjugirten Hauptaxe der Tangentenkegel normal und wird in P von einer der confocalen Flächen F^2 berührt. In Bezug auf diese Fläche liegt der Pol einer beliebigen anderen durch f gelegten Ebene ε einerseits in π, anderseits in der zu ε normalen Ebene des Büschels f, und folglich auf der Focalaxe f selber; die Fläche berührt also alle durch f gehenden Ebenen in Punkten von f, und geht somit durch f. Anderseits leuchtet ein, dass jede auf einer der confocalen Flächen F^2 liegende Gerade eine Focalaxe dieser Flächen ist, weil bezüglich jener Fläche je zwei sich in der Geraden rechtwinklig schneidende Ebenen conjugirt sind. Also:

„Die Focalaxen einer Schaar confocaler Flächen zweiter „Ordnung sind identisch mit den Geraden, die auf den con„focalen Flächen liegen; durch einen beliebigen Punkt P geht „allemal eine Regelfläche der Schaar. Die reellen Focalaxen, „welche eine Focalaxe schneiden, bilden eine Regelschaar und „liegen auf einer der confocalen Flächen."

Bezüglich einer Fläche II. Ordnung F^2 giebt es zu einer beliebigen Ebene ε einen „conjugirten Normalstrahl" e, welcher durch den Pol von ε geht und zu ε normal ist; derselbe ist auch bezüglich aller zu F^2 confocalen Flächen der conjugirte Normalstrahl von ε. Bringt man nun ε und e in der Geraden p und dem Punkte P zum Durchschnitt mit einer Symmetrie-Ebene γ von F^2, so gehen durch P die conjugirten Normalstrahlen von allen durch p gehenden Ebenen. Denn projicirt man einerseits die Pole dieser Ebenen aus dem Punkte P und fällt man anderseits von P aus Normalen auf die Ebenen, so erhält man zwei zu dem Ebenenbüschel p projectivische Strahlenbüschel P, welche drei Strahlen (nämlich ausser e noch die beiden zu resp. γ und p normalen Strahlen) entsprechend gemein haben und folglich identisch sind. Ausserdem aber sind p und P zwei zugeordnete Elemente eines in der Symmetrie-Ebene γ liegenden ebenen Polarsystems. Denn der conjugirte Normalstrahl einer jeden durch e

gehenden Ebene $\overline{eq}$ liegt in ε und schneidet γ in einem Punkte Q von p; wenn also in γ eine Gerade q sich um P dreht, so beschreibt der ihr zugeordnete Punkt Q die Gerade p. Also:

„Bringt man mit einer Symmetrie-Ebene γ der confocalen „Flächen jede Ebene und den ihr conjugirten Normalstrahl „zum Durchschnitt, so erhält man zugeordnete Elemente eines „in γ liegenden ebenen Polarsystems, von welchem jede in γ „enthaltene Hauptaxe der Flächen eine Axe ist. Die drei „Hauptaxen eines jeden Tangentenkegels der Flächen schneiden „die Symmetrie-Ebene in einem Poldreieck dieses Polarsystems. „Wir nennen die Ordnungscurve desselben einen Focalkegel„schnitt und jeden ihrer Punkte einen Focalpunkt der con„focalen Flächen."

Sind die confocalen Flächen Paraboloide, so ist der unendlich fernen Geraden der Symmetrie-Ebene γ der unendlich ferne Punkt der Hauptaxe zugeordnet.

„Die Focalpunkte confocaler Paraboloide liegen folglich „auf zwei Parabeln, deren Axen mit der Hauptaxe der Paraboloide „zusammenfallen."

Wenn dagegen die confocalen Flächen einen Mittelpunkt haben, so theilen ihre drei Symmetrie-Ebenen und die unendlich ferne Ebene den unendlichen Raum in acht rechtwinklige Räume. Nur einen R von diesen acht Räumen schneidet die beliebige Ebene ε nicht; dagegen wird R von dem zu ε conjugirten Normalstrahle e geschnitten, weil die unendlich fernen Elemente von ε und e durch die drei Symmetrie-Ebenen von einander getrennt sind. Die Gerade e hat mit der Begrenzung des Raumes R ausser ihrem unendlich fernen Punkte nur einen eigentlichen Punkt gemein, und diejenige Symmetrie-Ebene, in welcher der letztere liegt, enthält keinen reellen Focalkegelschnitt, während die Focalkegelschnitte in den beiden anderen Symmetrie-Ebenen reell sind (Seite 64). Also:

„Die confocalen Flächen zweiter Ordnung haben zwei und „nur zwei reelle Focalkegelschnitte."

Jeder Focalpunkt F einer Symmetrie-Ebene liegt auf der ihm zugeordneten Geraden f, und die durch f gelegten Ebenen werden von ihren conjugirten Normalstrahlen in dem Focalpunkte F rechtwinklig geschnitten. Jede Tangente f eines Focalkegelschnittes ist folglich eine Focalaxe der confocalen Flächen, und:

„Die Tangentenkegel, welche den confocalen Flächen aus „einem Focalpunkte F umschrieben werden können, sind „Rotationskegel“,

weil sie unendlich viele zu f normale Hauptaxen haben. — Die Mittelpunkte aller den confocalen Flächen umschriebener Rotationskegel sind Focalpunkte der Flächen, weil sie von je einem Büschel von Axen die Fusspunkte sind und deshalb in der einen oder der anderen Symmetrie-Ebene und auf den ihnen zugeordneten Geraden derselben liegen müssen.

„Zu der Schaar confocaler Flächen gehören auch die Focal„kegelschnitte als singuläre Flächen zweiter Classe.“

Wir können nämlich in Bezug auf einen dieser Kegelschnitte jeder Ebene ε denjenigen Punkt als Pol zuweisen, durch dessen Polare sie geht; die aus diesem Pole auf ε gefällte Normale ist eine Axe der confocalen Flächen und ihr Schnittpunkt mit ε ist ihr Fusspunkt. Der Axencomplex und die Fusspunkte aller Axen sind also durch den Focalkegelschnitt ganz ebenso bestimmt wie durch irgend eine andere der confocalen Flächen. — Jeder der beiden reellen Focalkegelschnitte wird aus den Punkten des anderen durch Rotationskegelflächen projicirt. Der eine ist folglich eine Ellipse, wenn der andere eine Hyperbel ist, und umgekehrt; denn durch eine Ellipse können zwei, durch eine Hyperbel aber keine Rotationscylinder gelegt werden.

Sei g eine beliebige Gerade und seien g_1 und g_2 ihre Polaren in Bezug auf irgend zwei der confocalen Flächen. Jeder durch g gelegten Ebene π entspricht dann in g sowohl wie in g_1 ein Pol, und in der Verbindungslinie a dieser beiden Pole liegen auch die übrigen Pole von π hinsichtlich aller confocalen Flächen. Dreht sich die Ebene π um g, so beschreibt die ihr conjugirte Axe a einen Strahlenbüschel II. Ordnung oder eine Regelschaar, je nachdem g_1 und g_2 sich schneiden oder nicht; und zwar rückt a einmal ins Unendliche, wenn nämlich π mit einer Durchmesser-Ebene zusammenfällt. Der Ebenenbüschel g ist projectivisch zu dem von a beschriebenen Strahlengebilde und erzeugt mit demselben eine Raumcurve oder eine ebene Curve dritter Ordnung. Also:

„Bezüglich einer Schaar confocaler Flächen II. Ordnung „liegen die Pole aller Ebenen, welche durch eine beliebige „Gerade g gehen, entweder auf einem hyperbolischen Paraboloid, „welches auch die Polaren g_1 der Geraden g enthält, oder „(wenn g eine Axe ist) auf den Tangenten einer Parabel.

„Jede Ebene des Büschels g berührt eine der confocalen Flächen;
„und zwar liegen die Berührungspunkte im ersteren Falle auf
„einer Raumcurve dritter Ordnung, im letzteren dagegen auf
„einer ebenen Curve dritter Ordnung."

Ist g eine Axe, so steht sie auf der Parabel-Ebene senkrecht und wird von zwei Tangenten der Parabel geschnitten; ist g keine Axe, so schneidet sie das hyperbolische Paraboloid entweder in höchstens zwei Punkten, oder sie hat alle ihre Punkte mit demselben gemein und fällt mit einer ihrer Polaren zusammen. Die Gerade g wird also entweder von höchstens zwei der confocalen Flächen berührt, oder sie liegt in einer dieser Flächen, und jede durch g gelegte Ebene wird von der Fläche in einem auf g liegenden Punkte berührt.

Sei wiederum π irgend eine Ebene des Büschels g, und möge der Punkt, in welchem sie von einer der confocalen Flächen berührt wird, ausserhalb der Geraden g liegen. Dann können wir durch g noch eine zweite Berührungs-Ebene π^1 an die Fläche legen. Die Halbirungs-Ebenen μ und ν der von π und π^1 gebildeten Flächenwinkel stehen auf einander senkrecht und sind conjugirt in Bezug auf die Fläche II. Ordnung; und diejenige Axe, welche zu der einen μ dieser Halbirungs-Ebenen conjugirt und normal ist, muss in der anderen ν liegen, und wird daher in ihrem Fusspunkte von der Geraden g rechtwinklig geschnitten. Also:

„Jede Gerade g, welche auf keiner der confocalen Flächen
„II. Ordnung liegt, wird von zwei derselben berührt. Die
„Berührungs-Ebenen μ und ν dieser beiden Flächen stehen
„senkrecht auf einander und halbiren jeden Flächenwinkel $\pi\pi^1$,
„welcher aus der Geraden g irgend einer der confocalen Flächen
„umschrieben ist."

Der Ebenenbüschel g ist demnach ein symmetrisch-involutorischer mit den Ordnungs-Ebenen μ und ν, wenn je zwei Ebenen desselben einander zugeordnet werden, welche eine der confocalen Flächen berühren.

Zu einer anderen Reihe interessanter Sätze führt uns die Bemerkung, dass confocale Flächen II. Ordnung denselben Axencomplex besitzen, und dass die Fusspunkte der Axen für alle jene Flächen die nämlichen sind. Z. B.:

„Die Normalen, welche in einer beliebigen Ebene π an eine
„Schaar confocaler Flächen II. Ordnung gezogen werden können,

„umhüllen im Allgemeinen eine Parabel; ihre Fusspunkte liegen „auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, und „die Berührungs-Ebenen, auf denen sie senkrecht stehen, bilden „einen Ebenenbüschel I. Ordnung (Seite 183). Diese Normalen „sind zugleich die Axen derjenigen Kegelschnitte, welche die „Ebene π mit den confocalen Flächen gemein hat; die Mittel- „punkte dieser Kegelschnitte liegen auf der Directrix der „Parabel (Seite 174)."

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn π entweder eine Durchmesser-Ebene ist, oder auf einer Symmetrie-Ebene senkrecht steht:

„Steht die Ebene π senkrecht auf einer Symmetrie-Ebene „γ, so bilden alle in π liegenden Normalen der confocalen „Flächen einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt P in der „Symmetrie-Ebene γ liegt; und die Fusspunkte dieser Normalen „sind auf einem durch P gehenden Kreise enthalten, dessen „Mittelpunkt in γ liegt."

„Ist π eine Durchmesser-Ebene, so bilden alle in ihr liegen- „den Normalen einen Parallel-Strahlenbüschel; die Fusspunkte „dieser Normalen liegen entweder auf einer gleichseitigen „Hyperbel, deren Mittelpunkt mit demjenigen der confocalen „Flächen zusammenfällt, oder (falls die confocalen Flächen „keinen Mittelpunkt besitzen) auf einer Geraden."

Wir erhalten hiedurch zugleich Aufschluss über die Lage der Normalen, welche parallel zu einer gegebenen Geraden oder aus einem Punkte P einer Symmetrie-Ebene γ an die confocalen Flächen gezogen werden können.

„Die sämmtlichen Normalen, welche aus einem beliebigen „Punkte P an die confocalen Flächen II. Ordnung gezogen „werden können, liegen im Allgemeinen auf einer Kegelfläche „II. Ordnung; ihre Fusspunkte liegen auf einer Raumcurve „fünfter Ordnung, von welcher P ein dreifacher Punkt ist."

Auf die nämliche Art können alle übrigen, für die Fusspunkte eines Axencomplexes bewiesenen Sätze auf die Normalen einer Schaar confocaler Flächen und deren Fusspunkte übertragen werden. Beispielsweise nenne ich noch den folgenden Satz, welcher aus der Verbindung von zwei vorhergehenden sich ergiebt:

„Diejenigen Normalen der confocalen Flächen, welche von „einer Symmetrie-Ebene γ in den Punkten eines Durchmessers

„*d* geschnitten werden, sind zu einer auf γ senkrechten Ebene ε „parallel. Ihre Fusspunkte liegen auf einer durch *d* gehenden „Fläche, von welcher γ eine Symmetrie-Ebene ist. Dieselbe „wird von jeder zu ε parallelen Ebene in einem Kreise und „in einer unendlich fernen Geraden geschnitten, und von jeder „durch *d* gelegten Ebene in diesem Durchmesser und einer „gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit demjenigen „der confocalen Flächen zusammenfällt, und von deren Asymp„toten die eine zu ε parallel ist. Statt dieser Hyperbel er„halten wir nur dann eine eigentliche und eine unendlich „ferne Gerade, wenn die confocalen Flächen keinen Mittel„punkt haben; in diesem Falle besteht die Fusspunktenfläche „aus einer geradlinigen Fläche II. Ordnung und der unendlich „fernen Ebene.“

Vierundzwanzigster Vortrag.

Flächen dritter Ordnung, ihre Abbildung auf einer Ebene und die zugehörigen Raumcurven dritter Ordnung.

Wenn im Raume drei beliebige, nicht concentrische Strahlenbündel S, S_1, S_2 collinear, aber nicht perspectivisch auf einander bezogen werden, so schneiden sich je drei einander entsprechende Ebenen derselben in einem Punkte und nur ausnahmsweise in einer Geraden. Diese Schnittpunkte homologer Ebenen erfüllen eine Fläche F^3, mit deren Untersuchung wir in diesem Vortrage uns beschäftigen wollen.

Zunächst bestimmen wir die Ordnung der Fläche F^3, d. h. die Anzahl der Punkte, welche F^3 mit einer Geraden g gemein hat. Wenn in einem Punkte P von g zwei homologe Strahlen der Büschel S und S_1 sich schneiden, so liegt P auf der Fläche F^3; denn den Ebenenbüscheln $\overline{SP}$ und $\overline{S_1P}$ entspricht im Bündel S_2 ein dritter Ebenenbüschel, von welchem eine Ebene durch den Punkt P geht, so dass P als Schnittpunkt von drei homologen Ebenen der Bündel S, S_1, S_2 sich darstellt. Wir schliessen daraus beiläufig:

„Die Fläche F^3 geht durch die drei Raumcurven dritter „Ordnung, deren Sehnensysteme von je zwei der collinearen „Strahlenbündel S, S_1, S_2 erzeugt werden."

Schneiden sich in g zwei einander entsprechende Ebenen der Bündel S und S_1, so hat die Gerade g mit einer der drei Raumcurven höchstens zwei Punkte gemein; und ausserdem wird sie von der entsprechenden Ebene des Bündels S_2 in einem Punkte der Fläche F^3 geschnitten. Tritt der genannte Fall nicht ein, so projiciren wir g aus S durch einen Strahlenbüschel und suchen zu diesem in S_1 den entsprechenden Strahlenbüschel. Der letztere ist projectivisch zu g und erzeugt mit g im Allgemeinen einen Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen sämmtliche Ebenen von den entsprechenden des Bündels S in je einem Punkte von g geschnitten werden. Dem Ebenenbüschel II. Ordnung entspricht aber in S_2 ein gleichfalls zu g projectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung, und von diesem gehen höchstens drei Ebenen durch die ihnen entsprechenden Punkte von g und mindestens eine Ebene (I. Abth. Seite 108), falls nicht jeder Punkt von g auf der ihm entsprechenden Ebene von S_2 liegt. In jedem solchen Punkte von g schneiden sich aber drei homologe Ebenen der Bündel S, S_1, S_2, und derselbe liegt demnach auf der Fläche F^3. Statt der Ebenenbüschel II. Ordnung erhalten wir drei zu g projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung, wenn in einem Punkte P von g zwei homologe Strahlen der Bündel S und S_1 sich schneiden. Zwei von diesen Ebenenbüscheln liegen perspectivisch zu der Punktreihe g, und der dritte, zum Bündel S_2 gehörige liegt entweder ebenfalls perspectivisch zu g, oder es gehen höchstens zwei Ebenen desselben durch die ihnen entsprechenden Punkte von g, so dass auch in diesem Falle die Gerade g höchstens zwei von P verschiedene Punkte mit der Fläche F^3 gemein hat. Aus dem Allen folgt:

Die Fläche F^3 *hat mit jeder Geraden* g*, die nicht ganz auf ihr liegt, höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein. Drei collineare, nicht concentrische Strahlenbündel* S*,* S_1*,* S_2 *erzeugen also eine Fläche* F^3 *dritter Ordnung, welcher die sämmtlichen Schnittpunkte von je drei homologen Ebenen der Bündel angehören.*

Eine Abweichung von diesem Satze tritt ein, wenn die collinearen Bündel ein und dasselbe Strahlensystem erster Ordnung mit einander erzeugen. Dieser Fall wurde bereits im zwölften Vortrage erledigt und soll von jetzt an ausgeschlossen bleiben.

Wir können eine Fläche dritter Ordnung durch Bewegung eines Punktes beschreiben auf Grund des Satzes:

„Wenn die vier Flächen eines veränderlichen Tetraeders „um vier feste Punkte sich drehen und drei Eckpunkte auf „drei durch einen Punkt gehenden, festen Geraden sich be-„wegen, so beschreibt der vierte Eckpunkt eine Fläche dritter „Ordnung."

Denn man erkennt leicht, dass die vier Flächen vier collineare Strahlenbündel um die festen Drehpunkte beschreiben, von denen drei zum vierten perspectivische Lage haben und die Fläche dritter Ordnung erzeugen.

Zu vielen wichtigen Eigenschaften der Fläche F^3 dritter Ordnung gelangen wir am einfachsten, indem wir die Fläche in folgender Art auf ein ebenes System Σ projectivisch beziehen oder auf der Ebene Σ abbilden. Wir beziehen das ebene System Σ reciprok auf die drei collinearen Strahlenbündel S, S_1, S_2; dann entsprechen jedem Punkte von Σ drei homologe Ebenen der Bündel und zugleich deren in F^3 liegender Schnittpunkt. Umgekehrt kann auch zu jedem Punkte P von F^3 der entsprechende Punkt von Σ gefunden werden mittelst derjenigen drei einander entsprechenden Ebenen der Strahlenbündel, welche in P sich schneiden. Jedem geraden Gebilde von Σ entsprechen in S, S_1, S_2 drei projectivische Ebenenbüschel und folglich in F^3 eine Raumcurve dritter Ordnung, welche von den Ebenenbüscheln erzeugt wird (Seite 92). Mit einem Worte:

„Die Fläche F^3 dritter Ordnung ist auf das ebene System Σ „in der Weise bezogen, dass jedem Punkte von F^3 ein Punkt „von Σ entspricht, jeder cubischen Raumcurve von F^3, welche „durch drei homologe Ebenenbüschel von S, S_1, S_2 erzeugt „wird, ein zu ihr projectivisches gerades Gebilde von Σ, und „überhaupt den sämmtlichen so erzeugten Raumcurven dritter „Ordnung von F^3 die sämmtlichen Geraden von Σ."

Wir wollen alle diese auf F^3 liegenden Raumcurven dritter Ordnung, welche den Geraden von Σ entsprechen, unter dem Namen „erstes Curvensystem der Fläche dritter Ordnung" zusammenfassen. Wir werden auf der Fläche noch ein zweites System von cubischen Raumcurven kennen lernen, deren Erzeugungsart eine ganz andere ist. Für dieses erste Curvensystem gelten die Sätze:

„Zwei Raumcurven dieses ersten Systems haben allemal „einen Punkt mit einander gemein“;

denn die entsprechenden Geraden von Σ müssen sich schneiden.

„Je zwei Punkte der Fläche dritter Ordnung können durch „eine einzige Raumcurve des ersten Systems mit einander ver- „bunden werden“;

denn durch die entsprechenden beiden Punkte von Σ kann eine Gerade gelegt werden.

Den sämmtlichen Geraden von Σ, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, entsprechen in F^3 die sämmtlichen Curven des ersten Systems, welche durch den entsprechenden Punkt hindurchgehen; wir wollen dieselben einen „Curvenbüschel“ nennen. Durch einen Strahlenbüschel des ebenen Systems Σ werden alle geraden Gebilde von Σ, die nicht den Mittelpunkt des Büschels enthalten, perspectivisch auf einander bezogen; und da jedes derselben zu der ihm entsprechenden Raumcurve dritter Ordnung projectivisch ist, so folgt:

„Durch einen Curvenbüschel des ersten Systems von F^3 „werden alle übrigen Raumcurven dieses Systems projectivisch „auf einander bezogen.“

Vier Curven des Büschels sollen „vier harmonische Raumcurven“ des ersten Systems genannt werden, wenn sie von einer und folglich von jeder Curve l^3 des Systems, die nicht dem Curvenbüschel angehört, in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Jede dieser Curven l^3 erscheint als Schnitt des Curvenbüschels und ist projectivisch auf denselben bezogen. Ebenso ist der Curvenbüschel projectivisch zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel der Ebene Σ, weil je vier harmonischen Curven des ersteren vier harmonische Gerade des letzteren entsprechen. Ueberhaupt können wir gemäss der allgemeinen Definition der projectivischen Verwandtschaft diese Curvenbüschel auf einander und auf beliebige Elementargebilde projectivisch beziehen.

Die Fläche dritter Ordnung wird von einer beliebigen Ebene in einer Curve dritter Ordnung geschnitten; und jede Raumcurve des ersten Systems hat mit der Ebene und folglich mit der Schnittcurve mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein; also:

„Jeder ebenen Curve dritter Ordnung der Fläche F^3 entspricht „in Σ eine Curve dritter Ordnung, welche mit jeder Geraden

„von Σ mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte „gemein hat."

Wir können die Fläche F^3 in der hier angegebenen Weise projectivisch auf Σ beziehen, indem wir in F^3 irgend vier Punkte annehmen, von denen keine drei auf einer Raumcurve des ersten Systems enthalten sind, und denselben die Eckpunkte irgend eines in Σ gelegenen Vierecks willkürlich zuweisen. Hierdurch ist nämlich Σ auf die collinearen Strahlenbündel S, S_1, S_2 reciprok bezogen, also auch projectivisch auf F^3.

Die Fläche dritter Ordnung enthält, wie schon erwähnt wurde, noch ein zweites System von cubischen Raumcurven. Wir rechnen zu demselben zunächst die drei Raumcurven, deren Sehnensysteme von je zwei der collinearen Strahlenbündel erzeugt werden. Wir wollen mit k_1^3 und k_2^3 die beiden durch den Punkt S gehenden Raumcurven dritter Ordnung bezeichnen, welche der Bündel S mit den resp. Bündeln S_1 und S_2 erzeugt. Durch die Curve k_1^3 ist die collineare Verwandtschaft der Bündel S und S_1 völlig bestimmt, weil jede Sehne von k_1^3 durch zwei homologe Ebenen von S und S_1 projicirt wird. Anderseits ist mittelst der Bündel S und S_1 das Sehnensystem von k_1^3 projectivisch auf den Strahlenbündel S_2 bezogen, so dass jede Sehne von k_1^3 einer Ebene von S_2 entspricht und von derselben in einem Punkte der Fläche F^3 geschnitten wird. Die Fläche F^3 wird also auch erzeugt durch das Sehnensystem der Raumcurve k_1^3 dritter Ordnung und den zu ihm projectivischen Strahlenbündel S_2. Weil nun das Sehnensystem aus jedem Punkte seiner Ordnungscurve k_1^3 durch einen zu S, S_1 und folglich auch zu S_2 collinearen Strahlenbündel projicirt wird, so können wir den Mittelpunkt des Bündels S mit jedem anderen Punkte von k_1^3 vertauschen. Die cubische Raumcurve k_2^3, welche von den Bündeln S und S_2 erzeugt wird, ändert dann ihre Lage auf der Fläche F^3. Ich behaupte nun:

„Wenn der Punkt S die Raumcurve k_1^3 durchläuft, so be„schreibt die von den Bündeln S und S_2 erzeugte Raumcurve „k_2^3 des zweiten Systems die ganze Fläche dritter Ordnung, „indem sie jeden Punkt P derselben einmal überstreicht."

Wir müssen zeigen, dass für eine bestimmte Lage des Punktes S die Curve k_2^3 durch den Punkt P geht. In P schneiden sich drei homologe Ebenen α, α_1, α_2 der collinearen Bündel S, S_1, S_2; dem Strahle $\overline{S_2 P}$ oder b_2 von S_2 entspricht deshalb in S_1 ein Strahl b_1, welcher mit der durch P gehenden Sehne $\overline{\alpha\alpha_1}$ der

Raumcurve k_1^3 in einer Ebene α_1 liegt. Dem Ebenenbüschel b_2 von S_2 entspricht ferner in dem Sehnensystem von k_1^3 eine Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung, deren sämmtliche Strahlen von b_1 geschnitten werden und zu welcher auch $\overline{\alpha\alpha_1}$ gehört. Sei b derjenige Leitstrahl der Regelschaar resp. Strahl der Kegelfläche II. Ordnung, welcher durch den Punkt P geht. Derselbe schneidet (Seite 90) die Raumcurve k_1^3 in einem Punkte, welcher im Falle der Kegelfläche II. Ordnung vom Mittelpunkte derselben verschieden ist. Wählen wir diesen Schnittpunkt von b und k_1^3 zum Mittelpunkte des Bündels S, so erzeugt S mit S_2 jene durch P gehende cubische Raumcurve k_2^3. Denn dem Ebenenbüschel b_2 von S_2 entspricht im Bündel S derjenige Ebenenbüschel, durch welchen die Regelschaar oder Kegelfläche II. Ordnung aus S, oder, was dasselbe ist, aus der Geraden b projicirt wird; die Geraden b_2 und b entsprechen demnach einander, sodass ihr Schnittpunkt P wirklich auf k_2^3 liegt.

Den Mittelpunkt des Strahlenbündels S_2 können wir mit einem beliebigen anderen Punkt der Curve k_2^3, z. B. mit P vertauschen; wir können ihn also nach einem ganz beliebigen Punkte der Fläche F^3 dritter Ordnung verlegen. Oder:

> *Jeder Punkt der Fläche dritter Ordnung kann zum Mittelpunkte von einem der drei collinearen Strahlenbündel gemacht werden, durch welche die Fläche erzeugt wird.*

Hieraus ergiebt sich namentlich, dass die ursprünglich angenommenen drei Mittelpunkte keine ausgezeichneten Punkte der Fläche sind, dass vielmehr alle für sie bewiesenen Sätze auch von jedem anderen Punkte der Fläche gelten. Weil z. B die Mittelpunkte der Bündel S und S_1 durch eine cubische Raumcurve k_1^3 verbunden sind, die dem zweiten Curvensystem der Fläche F^3 angehört, so folgt:

> „Je zwei Punkte der Fläche F^3 dritter Ordnung können
> „durch eine Raumcurve des zweiten Curvensystems verbunden
> „werden.“

Die von S und S_1 erzeugte Raumcurve k_1^3 kann als eine ganz beliebige Curve des zweiten Systems betrachtet werden. Aus dieser Bemerkung lässt sich schliessen:

> „Jede Raumcurve l^3 des ersten Curvensystems liegt mit jeder
> „Curve k_1^3 des zweiten Systems auf einer Regel- oder Kegel-
> „fläche II. Ordnung; und zwar besteht im Falle der Regel-

„fläche die eine Regelschaar aus Sehnen der einen, die andere „aber aus Sehnen der anderen Raumcurve dritter Ordnung."

Nämlich die Raumcurve l^3 wird erzeugt durch drei einander entsprechende Ebenenbüschel a, a_1, a_2 der Bündel S, S_1, S_2; sie liegt deshalb mit k_1^3 auf derjenigen Fläche II. Ordnung, welche alle von den Ebenenbüscheln a und a_1 erzeugten Sehnen von k_1^3 enthält. Auf derselben Fläche II. Ordnung liegen auch die Axen der beiden Ebenenbüschel, und diese Axen sind Sehnen von l^3 (Seite 92).

„Umgekehrt wird jede geradlinige Fläche zweiter Ordnung, „welche durch eine Raumcurve c^3 des einen Systems gelegt „werden kann, von der Fläche dritter Ordnung ausserdem in „einer Raumcurve c_1^3 des anderen Systems geschnitten."

Weil nämlich jede Gerade der Fläche II. Ordnung mit der Raumcurve c^3 höchstens zwei, mit der Fläche F^3 dritter Ordnung aber im Allgemeinen drei Punkte gemein hat, so giebt es noch ausserhalb der Curve c^3 Punkte, welche sowohl auf F^3 als auch auf der Fläche II. Ordnung liegen. Seien P und Q irgend zwei derselben, und c_1^3 diejenige durch P und Q gehende Raumcurve dritter Ordnung, welche zu einem der beiden Curvensysteme, nicht aber zu demselben wie c^3 gehört. Dann kann durch c^3 und c_1^3 eine geradlinige Fläche II. Ordnung gelegt werden, welche mit der vorhin angenommenen die Raumcurve c^3 und die beiden durch P und Q gehenden Sehnen von c^3 gemein hat und deshalb mit derselben zusammenfallen muss.

Durch jeden Punkt S der Fläche dritter Ordnung geht ein Büschel von Raumcurven des zweiten Systems, und die Curven k_1^3 und k_2^3, durch welche die collineare Verwandtschaft der Bündel S, S_1 und S_2 gegeben ist, können als zwei ganz beliebige Curven dieses Büschels betrachtet werden. Jede Ebene von S projicirt je eine ihr entsprechende Sehne von k_1^3 und k_2^3; sie hat diese beiden Sehnen, welche in einem Punkte der Fläche F^3 sich schneiden, mit den beiden ihr entsprechenden Ebenen von S_1 und S_2 gemein. Daraus ergiebt sich folgende einfache Construction der Fläche dritter Ordnung mittelst der Raumcurven k_1^3 und k_2^3 des zweiten Systems:

„Durch den gemeinschaftlichen Punkt S der Curven k_1^3 „und k_2^3 legen wir Ebenen und bestimmen in jeder dieser „Ebenen diejenigen beiden Sehnen von k_1^3 und k_2^3, welche nicht

„durch S gehen; dann schneiden sich die beiden Sehnen in „einem Punkte der Fläche dritter Ordnung."

Geben wir z. B. der durch S gehenden Ebene eine solche Lage, dass sie von k_1^3 und k_2^3 in je zwei von S verschiedenen Punkten geschnitten wird, so fallen die beiden Sehnen zusammen mit den beiden Verbindungslinien dieser Punktenpaare, sind also äusserst leicht zu construiren. Nur dann, wenn eine Ebene im Punkte S die Curve k_1^3 oder k_2^3 berührt, geht die ihr entsprechende Sehne durch den Punkt S.

Wir können mittelst dieser Construction zu jedem beliebigen Punkte P der Fläche dritter Ordnung gelangen. Da nun k_1^3 und k_2^3 zwei ganz beliebige durch S gehende Raumcurven des zweiten Curvensystems sind, so folgt:

„Werden an die sämmtlichen Raumcurven dritter Ordnung, „welche dem zweiten Curvensystem angehören und durch „einen beliebigen Punkt S gehen, aus irgend einem anderen „Punkte P der Fläche dritter Ordnung Sehnen gezogen, so liegen „alle diese Sehnen in einer durch $\overline{SP}$ gehenden Ebene α."

Diese Ebene α wird von den ihr entsprechenden Ebenen α_1 und α_2 der Bündel S_1 und S_2 im Punkte P geschnitten; und jede durch P gehende Raumcurve des ersten Systems wird erzeugt durch drei Ebenenbüschel von S, S_1 und S_2, deren Axen in resp. α, α_1 und α_2 liegen. Diese Axen sind aber zugleich Sehnen jener durch P gehenden Raumcurve dritter Ordnung, so dass der Satz gilt:

„Werden an die sämmtlichen Raumcurven dritter Ordnung, „welche dem ersten Curvensystem angehören und durch den „beliebigen Punkt P gehen, aus dem Punkte S der Fläche „dritter Ordnung Sehnen gezogen, so liegen alle diese Sehnen „in derselben durch $\overline{SP}$ gehenden Ebene α, welche im vorigen „Satze genannt wurde."

Da der Punkt S beliebig auf der Fläche dritter Ordnung gewählt werden kann, so wird durch die letzten zwei Sätze eine gemeinschaftliche Eigenschaft der beiden Curvensysteme ausgesagt. Auf Grund des letzten Satzes können wir mit Hülfe von zwei Raumcurven l_1^3, l_2^3 des ersten Systems die Fläche dritter Ordnung ganz ebenso construiren, wie vorhin mittelst der Curven k_1^3 und k_2^3 des zweiten Systems. Aus dieser Construction aber lässt sich ohne Weiteres eine collineare Verwandtschaft zwischen drei Strahlenbündeln P, P_1, P_2 ableiten, sodass P mit P_1 und P_2 die

Sehnensysteme von resp. l_1^3 und l_2^3, also von zwei Curven des ersten Systems erzeugt, und dass je drei einander entsprechende Ebenenbüschel von P, P_1 und P_2 eine Raumcurve des zweiten Systems erzeugen. Die Fläche dritter Ordnung wird alsdann durch die collinearen Bündel P, P_1, P_2 erzeugt, aber die beiden Curvensysteme haben hinsichtlich ihrer Entstehungsart und ihrer gegenseitigen Beziehungen die Rollen ausgetauscht; woraus folgt:

Alle Eigenschaften des einen Systems von Raumcurven dritter Ordnung kommen auch dem anderen zu.

So z. B. müssen je zwei Curven des zweiten Systems einen Punkt mit einander gemein haben, weil dasselbe von je zwei Curven des ersten Systems gilt. Durch einen Curvenbüschel des zweiten Systems werden alle übrigen Curven dieses Systems projectivisch geschnitten. Die Fläche dritter Ordnung kann auf einer Ebene auch so abgebildet werden, dass jeder Curve des zweiten Systems eine Gerade entspricht und jedem Curvenbüschel des zweiten Systems ein ihm projectivischer Strahlenbüschel; die Curven des ersten Systems werden alsdann durch ebene Curven fünfter Ordnung abgebildet, weil sie mit den Raumcurven des zweiten Systems höchstens je fünf Punkte gemein haben. Die Sätze, welche wir jetzt für Curvenbüschel des ersten Systems beweisen wollen, gelten auch für Curvenbüschel des zweiten Systems.

„Wird jeder Raumcurve dritter Ordnung, welche einem „Curvenbüschel P des ersten Systems angehört, die Axe des- „jenigen Ebenenbüschels von S zugewiesen, welcher mit den „entsprechenden Ebenenbüscheln der Bündel S_1 und S_2 die „Curve erzeugt, also mit anderen Worten diejenige Sehne, „welche aus dem Punkte S an die Raumcurve gezogen werden „kann, so ist der Strahlenbüschel S, welchen diese Axen oder „Sehnen bilden, projectivisch auf den Curvenbüschel P be- „zogen."

Denn sei l^3 eine beliebige Raumcurve dritter Ordnung, welche dem ersten Curvensystem, nicht aber dem Curvenbüschel P angehört. Dieselbe ist projectivisch auf den Curvenbüschel bezogen, wenn jedem Punkte von l^3 die durch ihn gehende Curve des Büschels zugewiesen wird (Seite 194). Zugleich aber liegt derjenige Ebenenbüschel von S, welcher mit den entsprechenden Ebenenbüscheln von S_1 und S_2 die Raumcurve l^3 erzeugt, perspectivisch sowohl zu l^3 als auch zu dem im Satze genannten Sehnenbüschel S, und l^3 ist also auch zu letzterem projectivisch. Der

Curvenbüschel P und der Sehnenbüschel S sind demnach beide zu der Raumcurve l^3, also auch zu einander projectivisch.

Der Satz gilt auch in dem Falle, wenn der Mittelpunkt des Curvenbüschels mit dem Punkte S zusammenfällt. Der Sehnenbüschel liegt alsdann in derjenigen Ebene σ von S, welche die Tangenten der durch S gehenden Raumcurven k_1^3 und k_2^3 des zweiten Systems mit einander verbindet. Denn diese Ebene σ wird von den entsprechenden Ebenen σ_1 und σ_2 der Bündel S_1 und S_2 im Punkte S geschnitten, weil z. B. der Tangente von k_1^3 am Punkte S der Strahl $\overline{S_1 S}$ des Büschels S_1 entspricht und weil durch $\overline{S_1 S}$ die Ebene σ_1 gehen muss. Sei nun l_1^3 eine beliebige Curve des zum ersten System gehörigen Curvenbüschels S, und a die ihr entsprechende in σ liegende Sehne; dann hat eine beliebig durch a gelegte Ebene noch einen ausserhalb a liegenden Punkt mit der Raumcurve l_1^3 gemein, welcher sich aber dem Punkte S unbegrenzt nähert, wenn jene Ebene der Ebene σ näher und immer näher kommt. Folglich enthält σ auch die Tangente l_1^3 im Punkte S; oder:

„Werden in einem beliebigen Punkte S der Fläche dritter „Ordnung an alle durch S gehenden Raumcurven des ersten „und des zweiten Systems Tangenten gezogen, so liegen alle „diese Tangenten in einer Ebene σ, der sogenannten Be- „rührungs-Ebene des Punktes S.“

Zu beachten ist noch, dass die Raumcurve l_1^3 im Allgemeinen von σ berührt und ausserdem in einem von S verschiedenen Punkte L geschnitten wird, und dass ihre Sehne a die Punkte S und L mit einander verbindet, also eine eigentliche Sehne von l_1^3 ist. Nur dann fällt a mit der Tangente von l_1^3 zusammen, wenn σ sich der Curve l_1^3 im Punkte S anschmiegt.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit gewisser ausgezeichneter Punkte Erwähnung thun, die in besonderen Fällen sich auf der Fläche dritter Ordnung finden können, und für welche die bisherigen Sätze nicht gelten. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die Raumcurven k_1^3 und k_2^3 dritter Ordnung, welche der Strahlenbündel S mit den ihm collinearen Bündeln S_1 und S_2 erzeugt, noch ausser dem Punkte S einzelne Punkte, nämlich höchstens vier, mit einander gemein haben, oder auch, dass sie sich in S berühren. In jedem dieser von S verschiedenen gemeinschaftlichen Punkte, und eventuell auch in S schneiden sich alsdann drei homologe Strahlen der Bündel, und daraus folgt, dass

ein solcher Punkt auf jeder Raumcurve dritter Ordnung sowohl des ersten als auch des zweiten Curvensystems liegen muss. Nach einem solchen ausgezeichneten Punkte können die Mittelpunkte von zwei der collinearen Bündel S, S_1, S_2 verlegt werden; so dass die Fläche erzeugt werden kann durch drei collineare Strahlenbündel, von denen zwei concentrisch liegen. Wir wollen auf diese besonderen Fälle nicht näher eingehen, sondern annehmen, dass die Raumcurven k_1^3 und k_2^3, die wir als zwei ganz beliebige Curven des zweiten Systems ansehen dürfen, nur einen einzigen Punkt S mit einander gemein haben und sich in demselben schneiden. Auch zwei beliebige Raumcurven des ersten Systems haben alsdann nur einen Punkt mit einander gemein und schneiden sich in demselben.

Wird jede Raumcurve l^3 des ersten Curvensystems mit einer beliebig gegebenen Curve k^3 des zweiten Systems durch eine Fläche II. Ordnung verbunden, so erhalten wir einen Bündel von Flächen II. Ordnung, die sich alle in k^3 schneiden. Jeder Curve des ersten Systems entspricht eine durch sie gehende Fläche des Bündels k^3; jedem Curvenbüschel P aber entspricht ein F^2-Büschel, dessen sämmtliche Flächen die Raumcurve k^3 und eine durch den Punkt P gehende Sehne von k^3 mit einander gemein haben. — Sei der Mittelpunkt des Strahlenbündels S ausserhalb der Raumcurve k^3 gelegen; jedem Strahle a von S entspricht dann eine bestimmte Curve l^3 des ersten Systems, welche der Ebenenbüschel a mit den homologen Ebenenbüscheln der Bündel S_1 und S_2 erzeugt, und zwar ist a eine Sehne dieser Raumcurve l^3. Dem Strahle a ist sonach auch eine Fläche $k^3 l^3$ des Flächenbündels k^3 zugewiesen, und zugleich eine bestimmte Ebene α, welche vom Punkte S die Polar-Ebene ist hinsichtlich dieser Fläche. Die Ebene α geht durch den Punkt S^1, welcher dem Punkte S conjugirt ist hinsichtlich der Raumcurve k^3; sie wird ausserdem vom Strahle a in einem Punkte geschnitten, welcher zu S conjugirt ist hinsichtlich der Raumcurve l^3 (Seite 107).

Dreht sich der Strahl a um den Punkt S, so ändert die Curve l^3 ihre Lage auf der Fläche dritter Ordnung und ebenso die Fläche $k^3 l^3$ II. Ordnung im Bündel k^3; und zugleich muss die Polar-Ebene α von S um den Punkt S^1 sich drehen. Beschreibt nun a einen gewöhnlichen Strahlenbüschel, so beschreibt l^3 einen zu ihm projectivischen Curvenbüschel; demnach muss die Fläche $k^3 l^3$ einen F^2-Büschel beschreiben, und die Ebene α einen zu diesem Flächen-

büschel projectivischen Ebenenbüschel I. Ordnung. Also jedem Strahle von S entspricht eine Ebene des Strahlenbündels S^1 und jedem Strahlenbüschel I. Ordnung von S und dessen Ebene entspricht in S^1 ein Ebenenbüschel I. Ordnung und dessen Axe. Daraus folgt, dass die Bündel S und S^1 reciprok auf einander bezogen sind, also eine Fläche II. Ordnung erzeugen; oder:

„Wird aus einem beliebigen Punkte S der Fläche dritter „Ordnung an jede Raumcurve l^3 des ersten Systems eine Sehne „a gezogen und auf a derjenige Punkt bestimmt, welcher zu S „conjugirt ist hinsichtlich der Curve l^3, so erfüllen alle so ge- „fundenen Punkte eine durch S gehende Fläche II. Ordnung. „Dieselbe enthält auch alle Punkte S^1, welche zu S conjugirt „sind hinsichtlich der Raumcurven k^3 des zweiten Systems."

Wenn irgend ein Strahl des Bündels S die Fläche dritter Ordnung in zwei von S verschiedenen Punkten A, A_1 schneidet, also von der durch A und A_1 gehenden Curve des ersten Systems eine Sehne ist, so ist der zu S conjugirte Punkt dieser Sehne durch A und A_1 harmonisch getrennt von S. Drehen wir den Strahl $\overline{SAA_1}$ so, dass die Punkte A und A_1 einander unbegrenzt sich nähern und $\overline{SAA_1}$ in eine Tangente der Fläche dritter Ordnung übergeht, so muss mit dem Berührungspunkt auch der zu S conjugirte Punkt sich vereinigen, eben weil er von S harmonisch getrennt ist durch A und A_1. Ebenso ergiebt sich, dass der zu S conjugirte Punkt mit S sich vereinigt, wenn einer der Punkte A und A_1 mit S zusammenfällt, wenn also der Strahl $\overline{SAA_1}$ einer in S an die Fläche dritter Ordnung gezogenen Tangente unbegrenzt sich nähert. Also:

„Die genannte Fläche II. Ordnung enthält jeden Punkt, „welcher vom Punkte S durch zwei andere Punkte A, A_1 der „Fläche F^3 dritter Ordnung harmonisch getrennt ist, sowie „die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von S an die „Fläche F^3 gezogen werden können. Sie hat ausserdem mit „F^3 die Berührungs-Ebene im Punkte S gemein, und kann „die Polare des Punktes S genannt werden."

Weil jedem Curvenbüschel des ersten Systems ein ihm projectivischer Strahlenbüschel von S entspricht, so können wir sagen, das erste Curvensystem sei projectivisch auf den Strahlenbündel S bezogen. Der Bündel S ist aber reciprok auf den Bündel S^1 bezogen, und anderseits entsprechen je vier harmonischen Ebenen von S^1 stets vier harmonische Flächen des Flächenbündels k^3, so

dass der letztere ebenfalls zum Strahlenbündel S^1 projectivisch ist. Wir schliessen hieraus:

„Wird jeder Curve des ersten Systems die durch sie hin-„durchgehende Fläche des Bündels k^3 zugewiesen, so ist das „Curvensystem projectivisch auf den Flächenbündel k^3 be-„zogen; namentlich entspricht jedem Curvenbüschel des Systems „ein zu ihm projectivischer F^2-Büschel von k^3."

Mit Hülfe dieses Satzes kann die gegenseitige Lage derjenigen Punkte leicht angegeben werden, welche von einem ausserhalb der Fläche F^3 dritter Ordnung gegebenen Punkte P durch je zwei Punkte der Fläche harmonisch getrennt sind, oder allgemeiner zu reden, welche zu P conjugirt sind in Bezug auf je eine Curve l^3 des ersten Systems. Verbinden wir l^3 mit irgend drei Curven k^3, k_1^3, k_2^3 des zweiten Systems durch Flächen II. Ordnung, so schneiden sich die drei Polar-Ebenen des Punktes P hinsichtlich dieser Flächen II. Ordnung in demjenigen Punkte, welcher zu P conjugirt ist in Bezug auf l^3. Wenn nun l^3 das ganze erste Curvensystem beschreibt, so beschreiben die Flächen $k^3 l^3$, $k_1^3 l^3$ und $k_2^3 l^3$ drei Flächenbündel k^3, k_1^3 und k_2^3, welche zum Curvensystem und folglich auch zu einander projectivisch sind, und die drei Polar-Ebenen des Punktes P beschreiben drei Strahlenbündel P^1, P_1^1, P_2^1, welche zu den Flächenbündeln und dem Curvensystem projectivisch und sonach zu einander collinear sind, und deren Mittelpunkte zu P conjugirt sind hinsichtlich der Raumcurven k^3, k_1^3, k_2^3. Die collinearen Bündel P^1, P_1^1, P_2^1 erzeugen aber eine Fläche dritter Ordnung; oder:

„Die sämmtlichen Punkte, welche durch je zwei Punkte „der Fläche F^3 dritter Ordnung von einem ausserhalb F^3 ge-„legenen Punkte P harmonisch getrennt sind, liegen auf einer „zweiten Fläche dritter Ordnung. Die letztere geht auch durch „die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von P an die „Fläche F^3 gezogen werden können, und wird von diesen „Tangenten gleichfalls berührt."

Jede durch P gelegte Gerade, welche mit F^3 drei Punkte A, A_1, A_2 gemein hat, wird auch von jener zweiten Fläche dritter Ordnung in drei Punkten B, B_1, B_2 geschnitten. Wird nun der Strahl $\overline{PA}$ so um P gedreht, dass er in eine Tangente der Fläche F^3 übergeht, dass also zwei der Punkte A, A_1, A_2 im Berührungspunkte sich vereinigen, so fällt mit ihnen auch einer der Punkte

B, B_1, B_2 zusammen, während zugleich die beiden übrigen sich vereinigen; denn jeder der Punkte B, B_1, B_2 ist von P durch zwei der Punkte A, A_1, A_2 harmonisch getrennt. Daraus folgt der Schluss unseres Satzes.

Fünfundzwanzigster Vortrag.

Ebene Curven dritter Ordnung.

Zu ferneren wichtigen Eigenschaften der Fläche F^3 dritter Ordnung führt uns die Untersuchung der auf F^3 gelegenen ebenen Curven. Von einer beliebigen Ebene Σ wird die Fläche in einer Curve C_3 dritter Ordnung geschnitten, welche nämlich mit jeder, ausserhalb F^3 liegenden Geraden der Ebene höchstens drei Punkte und mindestens einen Punkt gemein hat. Die Fläche F^3 wird erzeugt durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2; die Curve C_3 erscheint deshalb als ein Erzeugniss von drei in Σ liegenden collinearen Systemen, welche von jenen Strahlenbündeln Schnitte sind, und kann unabhängig von der Fläche dritter Ordnung wie folgt definirt werden:

„Drei collineare ebene Systeme, welche in derselben Ebene „Σ liegen, erzeugen eine Curve C_3 dritter Ordnung, in deren „Punkten je drei homologe Strahlen der Systeme sich schneiden. „Durch keinen ausserhalb C_3 gelegenen Punkt gehen mehr „als zwei einander entsprechende Strahlen der Systeme.“

Projiciren wir die drei collinearen Systeme aus irgend drei Punkten des Raumes durch Strahlenbündel, so erzeugen diese eine durch C_3 gehende Fläche dritter Ordnung. Dieselbe artet aus in eine Kegelfläche dritter Ordnung, wenn die Mittelpunkte der drei Strahlenbündel zusammenfallen.

Die Fläche F^3 dritter Ordnung, als deren Schnitt wir die ebene Curve C_3 betrachten, kann mit Hülfe der collinearen Bündel S, S_1, S_2 auf ein ebenes System Σ' abgebildet werden; wir brauchen, wie wir gesehen haben, nur die Bündel reciprok auf Σ' zu beziehen. Als Abbildung von C_3 erhalten wir dann eine Curve C'_3, die ebenfalls von der dritten Ordnung ist. Nämlich die ebenen

Systeme Σ und Σ' sind mittelst der Bündel S, S_1, S_2 in dreifacher Weise reciprok auf einander bezogen; und jeder Punkt P' von C'_3 unterscheidet sich dadurch von den übrigen Punkten des Systems Σ', dass die drei ihm entsprechenden Strahlen von Σ nicht ein Dreieck bilden, sondern durch einen und denselben Punkt P von C_3 gehen. Umgekehrt entsprechen dem Punkte P von C_3 drei Strahlen in Σ', welche in einem einzigen Punkte P' von C'_3 sich schneiden; sodass auch C'_3 durch drei in Σ' liegende collineare Systeme erzeugt wird. Schon früher (Seite 194) haben wir auf ganz anderem Wege bewiesen, dass C'_3 mit jeder in Σ' gelegenen Geraden mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein hat. — Da Σ' reciprok auf die Strahlenbündel S, S_1, S_2 bezogen ist, so entsprechen der Curve C'_3 dritter Ordnung drei Ebenenbüschel dritter Ordnung; oder:

„Jede ebene Schnittcurve C_3 der Fläche F^3 dritter Ord-„nung wird durch drei homologe Ebenenbüschel dritter Ord-„nung von S, S_1, S_2 erzeugt."

Eine wichtige Eigenschaft der Curve C_3 folgt aus früheren Sätzen (Seite 202), nämlich:

„Ist S ein beliebiger Punkt der ebenen Curve C_3 dritter „Ordnung, so liegen die sämmtlichen Punkte, welche von S „durch je zwei andere Curvenpunkte harmonisch getrennt sind, „auf einem durch S gehenden Kegelschnitt. Derselbe berührt „in S die Curve C_3 und enthält die Berührungspunkte aller „Tangenten, welche aus dem Punkte S an C_3 gezogen werden „können. In speciellen Fällen artet der Kegelschnitt in zwei „Gerade aus."

Der Kegelschnitt muss z. B. immer dann aus zwei Geraden bestehen, wenn C_3 in drei Gerade a, b, c zerfällt. Dass dieses möglich ist, leuchtet sofort ein; denn wir können drei ebene Systeme collinear so auf einander beziehen, dass sie ein Dreiseit $a\,b\,c$ entsprechend gemein haben. Wenn C_3 eine Curve II. Ordnung α enthält und S ausserhalb oder innerhalb α liegt, so zerfällt der im Satze genannte Kegelschnitt ebenfalls in zwei Gerade, von denen eine mit der Polare von S in Bezug auf α identisch ist. Die andere Gerade geht durch S; sie muss ganz der Linie C_3 angehören, weil sonst unmöglich jeder ihrer Punkte durch zwei Punkte der Linie C_3 harmonisch von S getrennt sein könnte. Daraus folgt:

„Wenn die Curve C_3 dritter Ordnung einen Kegelschnitt α „enthält, so zerfällt sie in diesen und in eine Gerade."

Wir wollen die Mittelpunkte der drei Bündel S, S_1, S_2 durch einen Kegelschnitt $\varkappa^2$ mit einander verbinden, und beweisen, dass $\varkappa^2$ entweder ganz auf der Fläche F^3 enthalten ist, oder noch höchstens drei andere Punkte mit F^3 gemein hat. Wir projiciren den Kegelschnitt $\varkappa^2$ aus S durch einen Strahlenbüschel und suchen zu diesem im Bündel S_1 den entsprechenden Strahlenbüschel; dann ist der letztere ebenfalls projectivisch zu $\varkappa^2$ und erzeugt mit $\varkappa^2$ einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung. Jede Ebene desselben hat mit der entsprechenden Ebene von S einen Punkt von $\varkappa^2$ gemein; dem Ebenenbüschel entspricht aber auch in S_2 ein zu $\varkappa^2$ projectivischer Ebenenbüschel, von welchem entweder alle oder höchstens drei Ebenen durch die entsprechenden Punkte von $\varkappa^2$ hindurchgehen (I. Abth. Seite 109). Damit ist die Behauptung bewiesen; und weil S, S_1, S_2 als drei ganz beliebige Punkte der Fläche F^3 zu betrachten sind, so ergiebt sich:

„Die Fläche F^3 dritter Ordnung und jede ebene Schnitt„curve derselben hat mit keinem Kegelschnitt, der nicht ganz „ihr angehört, mehr als sechs Punkte gemein."

Wenn also eine ebene Curve C_3 dritter Ordnung mit einem Kegelschnitt mehr als sechs Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen Kegelschnitt und in eine Gerade. Ausserdem folgt:

„Eine Fläche II. Ordnung hat mit der Fläche dritter Ord„nung im Allgemeinen eine Raumcurve sechster Ordnung „gemein."

Denn eine beliebige Ebene schneidet die Fläche II. Ordnung in einem Kegelschnitt, welcher im Allgemeinen höchstens sechs (auf jener Raumcurve liegende) Punkte mit der Fläche dritter Ordnung gemein hat.

„Drei projectivische, nicht concentrische Ebenenbüschel „II. Ordnung erzeugen im Allgemeinen eine Raumcurve γ VI. Ord„nung, durch welche eine Fläche dritter Ordnung gelegt werden „kann."

Nämlich die drei Strahlenbündel S, S_1, S_2, welchen die Ebenenbüschel II. Ordnung angehören, sind durch diese collinear auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche F^3 dritter Ordnung. Bilden wir F^3 auf eine Ebene Σ' ab, so entspricht den Ebenenbüscheln II. Ordnung und der von ihnen erzeugten Curve γ ein Kegelschnitt γ' in Σ', und jeder ebenen Schnittcurve C_3 von F^3

entspricht eine Curve C'_3 dritter Ordnung in Σ'_1. Und weil γ' mit C'_3 höchstens sechs Punkte gemein hat, so wird auch γ von der Curve C_3 und von deren Ebene in höchstens sechs Punkten geschnitten. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn γ' einen Theil der Curve C'_3 bildet.

Wenn ein Kegelschnitt sechs Punkte mit einer Curve C_3 dritter Ordnung gemein hat und alsdann seine Gestalt und Lage in der Weise stetig ändert, dass zwei dieser sechs Punkte einander unbegrenzt sich nähern, so vereinigen sich schliesslich diese beiden Punkte zu einem gemeinschaftlichen Berührungspunkte, ausser welchem die beiden Curven nur noch vier Punkte mit einander gemein haben. Nun liegen aber die Berührungspunkte derjenigen Tangenten, welche von einem Punkte S der Curve C_3 an diese gezogen werden können, auf einem Kegelschnitt, welcher in S die Curve C_3 berührt; also:

„Durch einen beliebigen Punkt S der Curve C_3 dritter „Ordnung können ausser der Tangente in S selbst noch höchstens „vier Tangenten an C_3 gezogen werden."

Vom Punkte S der Curve C_3 gehen unendlich viele Strahlen aus, von welchen die Curve in je zwei von S verschiedenen Punkten geschnitten wird. Jedes dieser Punktenpaare kann durch eine Raumcurve dritter Ordnung verbunden werden, welche dem ersten Curvensystem der Fläche F^3 dritter Ordnung angehört; und aus früheren Sätzen (Seite 198) ergiebt sich, dass alle so bestimmten Raumcurven in einem Punkte P von C_3 sich schneiden. Auch haben wir bereits bewiesen, dass der Curvenbüschel P des ersten Systems projectivisch auf den Strahlenbüschel S bezogen ist, wenn jeder Curve von P ihre durch S gehende Sehne zugewiesen wird. Mit einer beliebigen Raumcurve k^3 des zweiten Systems kann der Curvenbüschel P durch einen F^2-Büschel verbunden werden, dessen Flächen in k^3 und in der durch P gehenden Sehne von k^3 sich schneiden. Auch dieser Flächenbüschel ist (Seite 203) projectivisch zu dem Curvenbüschel P und zu dem Strahlenbüschel S; und zwar liegen die Punkte, welche irgend ein Strahl von S mit der entsprechenden Curve des Büschels P und mit der zugehörigen Fläche II. Ordnung gemein hat, auf der Curve C_3. Der Flächenbüschel wird von der Ebene des Strahlenbüschels S in einem zu ihm projectivischen Kegelschnittbüschel geschnitten, dessen Kegelschnitte durch den Punkt P gehen, sowie durch die gemeinschaftlichen Punkte der Ebene

und der Raumcurve k^3. Weil nun k^3 beliebig im zweiten Curvensystem gewählt werden kann, so ergiebt sich:

„Die ebene Curve C_3 dritter Ordnung kann auf unendlich „viele Arten durch einen Strahlenbüschel S und einen zu ihm „projectivischen Kegelschnittbüschel erzeugt werden, sodass die „Schnittpunkte jedes Strahles von S mit dem ihm entsprechen-„den Kegelschnitte auf C_3 liegen.“

Von den vier Punkten, welche die Kegelschnitte mit einander gemein haben können, dürfen wir zwei O und Q ganz beliebig auf C_3 wählen, weil durch je zwei Punkte der Fläche F^3 eine Curve k^3 des zweiten Systems gelegt werden kann; der dritte R liegt ebenfalls auf k^3. Der vierte Punkt P hängt nur scheinbar von der Wahl des Punktes S ab; denn wir werden sogleich zeigen, dass jedem der drei Punkte O, Q, R die Rolle zugetheilt werden kann, welche in obiger Untersuchung der Punkt P spielte, dass also P mit jedem beliebigen Punkte von C_3 vertauscht werden darf. Dagegen ist jeder von den vier Punkten bestimmt durch die drei übrigen und durch den Punkt S. Denn wenn O, P, Q und S gegeben sind, so finden wir R, indem wir O, P und Q mit irgend zwei Punkten von C_3, die mit S in einer Geraden liegen, durch einen Kegelschnitt verbinden und den sechsten Durchschnittspunkt des letzteren mit C_3 aufsuchen.

Dass P mit O vertauscht werden kann, folgt aus dem Beweise des Satzes:

„Durch jede Curve, welche von einem Strahlenbüschel S „mit einem zu S projectivischen Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ „erzeugt wird und folglich durch den Mittelpunkt von S, sowie „durch die vier gemeinschaftlichen Punkte O, P, Q, R der „Kegelschnitte geht, kann eine Fläche dritter Ordnung gelegt „werden; oder die Curve ist von der dritten Ordnung.“

Wir verbinden drei der letzteren vier Punkte, z. B. P, Q und R durch eine Raumcurve k^3 dritter Ordnung, nehmen auf dieser die Mittelpunkte von zwei Strahlenbündeln S_1 und S_2 beliebig an und beziehen die letzteren collinear so auf einander, dass sie das Sehnensystem von k^3 erzeugen. Durch O geht eine Sehne von k^3, in welcher zwei homologe Ebenen α_1 und α_2 der Bündel sich schneiden. Seien s_1 und s_2 irgend zwei in resp. α_1 und α_2 liegende, homologe Strahlen der Bündel, so schneiden dieselben die Ebene $\overline{OPQR}$ in zwei Punkten, welche einem und demselben Kegelschnitt des Büschels $(OPQR)$ angehören; denn die pro-

jectivischen Ebenenbüschel s_1 und s_2 erzeugen eine durch k^3 und den Punkt O gehende Fläche II. Ordnung, auf welcher auch die Strahlen s_1 und s_2 liegen. Die beiden in α_1 und α_2 liegenden und einander entsprechenden Strahlenbüschel von S_1 und S_2 werden demnach von der Ebene $\overline{OPQR}$ in zwei Punktreihen geschnitten, welche zu dem Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ perspectivisch liegen (Seite 162); sie sind folglich auch zu dem Strahlenbüschel S projectivisch. Beziehen wir nun den Bündel S collinear auf S_1 und S_2, sodass jene drei projectivischen Strahlenbüschel einander entsprechen, so erzeugen die drei Bündel eine Fläche dritter Ordnung, von welcher die gegebene ebene Curve ein Schnitt ist. Die verlangte collineare Beziehung kann auf unendlich viele Arten hergestellt werden (Seite 6).

Die Rolle des Punktes P kann also wirklich von jedem anderen Punkte O der Curve C_3 dritter Ordnung übernommen werden, so dass allgemein sich ergiebt:

„Werden auf der ebenen Curve C_3 dritter Ordnung irgend „vier Punkte S, P, Q, R angenommen, und verbindet man je „zwei Punkte von C_3, welche mit S in einer Geraden liegen, „mit P, Q und R durch einen Kegelschnitt, so bilden alle „diese Kegelschnitte einen zum Strahlenbüschel S projectivischen „Kegelschnittbüschel, und auch der vierte gemeinschaftliche „Punkt O der Kegelschnitte liegt auf C_3."

Ohne Weiteres leuchtet ein, dass auch folgende Umkehrung dieses Satzes gültig ist:

Werden durch vier beliebige Punkte O, P, Q, R *einer ebenen Curve* C_3 *dritter Ordnung Kegelschnitte gelegt, welche noch je zwei Punkte mit* C_3 *gemein haben, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punktenpaare in einem und demselben Punkte* S *von* C_3. *Der Kegelschnittbüschel* (O P Q R) *ist projectivisch auf den Strahlenbüschel* S *bezogen, wenn jedem Kegelschnitt der so durch ihn gewonnene Strahl von* S *zugewiesen wird.*

Von den Punkten O, P, Q, R dürfen übrigens keine drei in einer Geraden liegen, wenn der Satz Sinn haben soll. Dagegen dürfen je zwei derselben einander unbegrenzt sich nähern, so dass der Satz auch dann noch gilt, wenn die Kegelschnitte in zwei Punkten von C_3 geschnitten und in einem dritten berührt werden, oder wenn sie einander und die Curve C_3 in zwei verschiedenen Punkten berühren u. s. w. Der Punkt S soll der Gegenpunkt des Vierecks $OPQR$ genannt werden.

Der letzte Satz enthält eine Haupt-Eigenschaft der ebenen Curven dritter Ordnung, und wir können aus ihm viele andere Sätze ableiten; zunächst den folgenden:

„Durch acht beliebige Punkte O, P, Q, R, A, B, C, D der „Ebene können unendlich viele Curven dritter Ordnung gelegt „werden; nämlich durch einen beliebigen neunten Punkt E „geht eine einzige dieser Curven, und nur wenn E eine ganz „besondere, durch die ersten acht Punkte völlig bestimmte „Lage hat, gehen durch diesen neunten Punkt alle jene Curven „dritter Ordnung."

Wir wählen unter den gegebenen Punkten irgend vier O, P, Q, R, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und legen durch dieselben einen Kegelschnittbüschel, bezeichnen ferner mit α, β, γ, δ, ε diejenigen fünf Kegelschnitte dieses Büschels $(OPQR)$, welche durch resp. A, B, C, D, E gehen. Alsdann können wir den Strahlenbüschel D projectivisch so auf $(OPQR)$ beziehen, dass die Strahlen $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ den resp. Kegelschnitten α, β, γ entsprechen; auch können wir zu den Kegelschnitten δ und ε die entsprechenden Strahlen $\overline{DD_1}$ und $\overline{DE_1}$ des Büschels D construiren. Wir denken uns jetzt durch A, B, C und D einen Kegelschnitt $\varkappa$ gelegt, welcher in D den Strahl $\overline{DD_1}$ berührt; derselbe wird vom Strahle $\overline{DE_1}$ in einem Punkte E_1 geschnitten und ist durch den Strahlenbüschel D projectivisch auf den Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ bezogen, so dass den Punkten A, B, C, D, E_1 von $\varkappa$ die resp. Kegelschnitte α, β, γ, δ, ε entsprechen. Jeder Strahlenbüschel S, welcher zum Kegelschnitt $\varkappa$ perspectivisch liegt, erzeugt mit dem Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ eine Curve dritter Ordnung, welche durch die acht Punkte O, P, Q, R, A, B, C, D hindurchgeht. Bestimmen wir nun auf $\varkappa$ den Mittelpunkt des Strahlenbüschels S so, dass aus ihm der Punkt E_1 durch den Strahl $\overline{SE}$ projicirt wird, so geht die Curve dritter Ordnung auch durch den neunten Punkt E. Für eine beliebige Lage des Punktes S hat die Curve dritter Ordnung mit dem Kegelschnitt die fünf Punkte S, A, B, C, D und folglich noch höchstens einen sechsten Punkt T gemein. Dieser Punkt T von $\varkappa$ liegt ebenso wie A, B, C und D auf dem ihm entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $(OPQR)$ und ist demnach auf jeder durch O, P, Q, R, A, B, C, D gehenden Curve dritter Ordnung enthalten; und nur wenn E mit T zusammenfällt, gehen durch E alle jene Curven hindurch.

Beachtenswerth ist, dass wir keineswegs den Kegelschnitt $\varkappa$ zu zeichnen brauchen, sondern dass wir die Punkte E_1 und S desselben durch lineare Constructionen, z. B. mittelst des Pascalschen Satzes, finden können. Ebenso können wir auf dem Strahle $\overline{SA}$ den zweiten Durchschnittspunkt A_1 mit dem Kegelschnitt α linear construiren; und da A_1 auch der gesuchten Curve dritter Ordnung angehört, so ist damit die Aufgabe gelöst:

> „Von einer ebenen Curve C_3 dritter Ordnung, welche durch „neun ihrer Punkte gegeben ist, denjenigen zehnten Punkt A_1 „zu construiren, welcher mit irgend fünf der gegebenen Punkte „auf einem Kegelschnitt α liegt."

Der Kegelschnittbüschel $(OPQR)$ enthält auch die drei Paare Gegenseiten des Vierecks $OPQR$. Suchen wir zu einem derselben, etwa zu $\overline{OP}$, $\overline{QR}$ den entsprechenden Strahl des Büschels S, so lösen wir die Aufgabe:

> „Auf einer Geraden $\overline{OP}$, welche zwei von den gegebenen „neun Punkten verbindet, den dritten Schnittpunkt mit der „Curve C_3 dritter Ordnung zu construiren."

Sei l ein beliebiger Strahl des Büschels S und λ der ihm entsprechende Kegelschnitt des Büschels $(OPQR)$. Wenn dann l dem Strahle $\overline{SO}$ sich unbegrenzt nähert, so rückt auch einer der beiden Schnittpunkte von l und λ dem Punkte O unbegrenzt näher, und die Verbindungslinie von O mit diesem Schnittpunkte geht über in die Tangente der Curve C_3 im Punkte O; zugleich ändert der Kegelschnitt λ sich so, dass er ebenfalls jene Verbindungslinie in O berührt. Bestimmen wir also im Punkte O die Tangente desjenigen Kegelschnittes, welcher dem Strahle $\overline{SO}$ entspricht, so lösen wir die Aufgabe:

> „In einem der gegebenen neun Punkte, z. B. in O die Tan„gente der Curve C_3 dritter Ordnung zu zeichnen."

Mit Hülfe dieser Bemerkungen können auch leicht die Aufgaben gelöst werden: „Eine Curve dritter Ordnung zu construiren, wenn von derselben gegeben sind entweder acht Punkte und die Tangente in einem derselben, oder sieben, sechs, fünf Punkte und die Tangenten in resp. zwei, drei, vier derselben." Wir übergehen die Ausführung dieser Aufgaben.

Aus dem Beweise des Satzes, dass acht Punkte der Ebene mit einem neunten im Allgemeinen durch eine Curve dritter Ordnung verbunden werden können, ergiebt sich noch der folgende Satz:

„*Zwei ebene Curven dritter Ordnung haben höchstens neun* „*Punkte* O, P, Q, R, A, B, C, D, T *mit einander gemein, welche* „*mit jedem zehnten Punkte* E *der Ebene durch eine Curve dritter* „*Ordnung verbunden werden können.*“

„Legt man durch vier von den neun Punkten, z. B. durch O, „P, Q, R einen Kegelschnittbüschel, und durch die übrigen „fünf einen Kegelschnitt $\varkappa$, so kann der letztere projectivisch „so auf den ersteren bezogen werden, dass den fünf Punkten „A, B, C, D, T von $\varkappa$ die resp. durch sie hindurchgehenden „Kegelschnitte des Büschels $(OPQR)$ entsprechen. Der Kegel- „schnitt $\varkappa$ enthält auch die Gegenpunkte S des Vierecks $OPQR$ „hinsichtlich aller Curven dritter Ordnung, welche durch die „neun Punkte gehen.“

Es kann der Fall eintreten, dass von den neun Punkten irgend sechs auf einem Kegelschnitt liegen. Sei K ein beliebiger siebenter Punkt dieses Kegelschnittes, so kann auch K mit den neun Punkten durch eine Curve dritter Ordnung verbunden werden; und da dieselbe mit dem Kegelschnitt sieben Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen Kegelschnitt und eine Gerade. Also:

„Liegen von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter „Ordnung sechs auf einem Kegelschnitt, so liegen die drei „übrigen in einer Geraden.“

Der Satz und sein Beweis gelten auch dann, wenn der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Wir folgern daraus:

„Wird eine Curve C_3 dritter Ordnung von drei Geraden „a, b, c so in je drei Punkten geschnitten, dass sechs von den „neun Schnittpunkten auf einer Curve II. Ordnung oder auch „auf zwei neuen Geraden k und l enthalten sind, so liegen die „drei letzten Schnittpunkte in einer Geraden m.“

Denn die drei Geraden a, b, c bilden eine zweite Linie dritter Ordnung und durch die neun Schnittpunkte können folglich unendlich viele Curven dritter Ordnung gelegt werden. — Die sechs Punkte, welche eine Curve C_3 dritter Ordnung mit irgend einem Kegelschnitt gemein hat, können zu zweien durch 15 Gerade verbunden werden, welche die C_3 in 15 Punkten P schneiden; diese 15 P liegen zu dreien in 15 Geraden g, und diese 15 g schneiden sich zu dreien in jenen 15 Punkten P.

Wir können im vorigen Satze die Geraden k und l willkürlich annehmen und durch ihre sechs Schnittpunkte mit C_3 die drei

Geraden a, b, c legen. Nähern sich k und l einander unbegrenzt, so gehen a, b und c über in drei Tangenten der Curve dritter Ordnung, und es ergiebt sich:

„Legt man in den drei Punkten, welche die Curve C_3 „dritter Ordnung mit einer Geraden k gemein hat, Tangenten „an C_3, so schneiden diese die Curve in drei neuen Punkten, „welche auf einer zweiten Geraden m liegen.“

Die Curve dritter Ordnung hat auch mit der unendlich fernen Geraden mindestens einen Punkt und höchstens drei Punkte gemein, und jede Tangente eines unendlich fernen Punktes wird Asymptote genannt. Also:

„Die Curve dritter Ordnung wird von ihren drei Asymptoten „in drei Punkten geschnitten, welche in einer Geraden liegen.“

Wir haben bereits gesehen, dass die ebene Curve C_3 dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen kann, aber noch nicht bewiesen, dass dieses immer dann geschehen muss, wenn die Curve C_3 eine Gerade g enthält. In der That ist dieses nicht nothwendig, denn es ist der Fall denkbar, dass die Curve dritter Ordnung sich ganz auf die Gerade g reducirt oder ausserhalb derselben nur einen einzigen Punkt besitzt. Wenn aber C_3 ausser g mehrere Punkte enthält, so liegen im Allgemeinen keine drei derselben in einer Geraden l; denn sonst müsste l mit C_3 auch noch den Punkt $l\dot{g}$, also im Ganzen vier Punkte gemein haben, und folglich ebenfalls ganz der Curze C_3 angehören, und C_3 müsste in drei Gerade zerfallen, von denen die dritte sich auch mit l oder g vereinigen könnte. Wir können demnach irgend fünf der ausserhalb g liegenden Punkte durch eine Curve $\varkappa^2$ II. Ordnung verbinden, welche mit g ebenfalls eine Curve dritter Ordnung bildet. Jene fünf Punkte bilden mit drei beliebigen Punkten der Geraden g ein System von acht Punkten, welche mit jedem neunten Punkte der Ebene im Allgemeinen eine einzige Curve dritter Ordnung bestimmen. Wählen wir nun den neunten Punkt ebenfalls auf der Geraden g, so fällt diese Curve dritter Ordnung offenbar mit C_3 zusammen, zugleich aber mit der Curve dritter Ordnung, welche aus g und dem Kegelschnitt $\varkappa^2$ besteht. Also:

„Wenn eine Curve C_3 dritter Ordnung eine Gerade g ent- „hält, so zerfällt sie im Allgemeinen in diese Gerade und einen „Kegelschnitt; in besonderen Fällen kann sie auch aus g und „noch zwei oder einer Geraden bestehen, wenn sie sich nicht

„etwa auf g und einen isolirten Punkt oder auch auf g allein „reducirt."

Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung sechs auf einem Kegelschnitt oder auch auf zwei Geraden enthalten sein müssen, wenn die drei übrigen in einer Geraden liegen.

Zum Schluss möge noch der Satz hier eine Stelle finden:

„Die Grundcurve eines Büschels von Flächen II. Ordnung „wird aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche dritter „Ordnung projicirt."

Seien S und T zwei beliebige Punkte der Grundcurve; dann können wir den Strahlenbündel S in dreifacher Weise reciprok auf den Bündel T beziehen, so dass er mit T irgend drei Flächen des F^2-Büschels erzeugt. Der Punkt S erscheint dann als Mittelpunkt von drei collinearen Strahlenbündeln, und diese erzeugen (Seite 204) eine Kegelfläche dritter Ordnung, deren Strahlen je einen Punkt der Raumcurve vierter Ordnung projiciren. Wir folgern daraus:

„Eine Kegelfläche dritter Ordnung wird von jeder Regel„fläche II. Ordnung, welche zwei Strahlen a, b mit der Kegel„fläche gemein hat, ausserdem in einer Raumcurve vierter „Ordnung geschnitten, durch welche ein Büschel von Flächen „II. Ordnung gelegt werden kann."

Zum Beweise verbinden wir den Punkt ab mit sieben beliebigen ausserhalb a und b gelegenen Schnittpunkten der Regelfläche und der Kegelfläche dritter Ordnung durch eine neue Fläche II. Ordnung. Von dieser wird die Regelfläche in einer Raumcurve vierter Ordnung geschnitten, welche auch auf der Kegelfläche dritter Ordnung liegen muss; denn sie wird aus dem Punkte ab durch eine Kegelfläche dritter Ordnung projicirt, welche mit der gegebenen ausser a und b noch sieben beliebige Strahlen gemein hat und folglich mit ihr identisch ist. — Ebenso lässt sich beweisen:

„Eine Kegelfläche dritter Ordnung und eine Kegelfläche „II. Ordnung, welche nicht concentrisch sind, aber sich längs „eines Strahles berühren, schneiden sich ausserdem in einer „Raumcurve vierter Ordnung, durch welche ein Büschel von „Flächen II. Ordnung gelegt werden kann."

Fassen wir die Haupt-Ergebnisse dieses Vortrages noch einmal kurz zusammen, so erhalten wir für die Fläche dritter Ordnung folgenden Satz:

Die Fläche dritter Ordnung wird von jeder Ebene in einer Curve C_3 dritter Ordnung geschnitten, welche durch neun auf ihr beliebig angenommene Punkte völlig bestimmt ist. Diese Schnittcurve zerfällt in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wenn sie mit der Geraden mehr als drei Punkte oder mit dem Kegelschnitt mehr als sechs Punkte gemein hat; sie kann auch auf drei oder weniger als drei Gerade sich reduciren. Die Curve C_3 dritter Ordnung hat mit einer anderen Curve dritter Ordnung höchstens neun Punkte gemein, von denen jeder durch die acht übrigen bestimmt ist; zwei Flächen dritter Ordnung schneiden sich deshalb im Allgemeinen in einer Raumcurve neunter Ordnung. Mit einer Fläche II. Ordnung hat die Fläche dritter Ordnung im Allgemeinen eine Raumcurve sechster Ordnung gemein.

Sechsundzwanzigster Vortrag.

Die siebenundzwanzig Geraden der Fläche dritter Ordnung und die auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte.

Wenn wir eine Fläche F^3 dritter Ordnung, welche durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2 erzeugt wird, auf ein ebenes System Σ abbilden, indem wir Σ auf S, S_1, S_2 reciprok beziehen, so entspricht jedem Punkte von F^3 ein einziger Punkt von Σ. Dagegen können in Σ gewisse Hauptpunkte vorkommen, denen mehr als ein Punkt von F^3, nämlich die sämmtlichen Punkte von je einer Geraden entsprechen. Einem beliebigen Punkte von Σ entsprechen nämlich drei homologe Ebenen von S, S_1, S_2, sowie deren in F^3 gelegener Schnittpunkt; wenn aber diese drei Ebenen mehr als einen Punkt, also eine Gerade mit einander gemein haben, so ist der zugehörige Punkt von Σ ein solcher Hauptpunkt. Jene dem Hauptpunkt entsprechende Gerade wollen wir einen Hauptstrahl der Fläche F^3 nennen; sie ist eine gemeinschaftliche Sehne der drei Raumcurven dritter Ordnung, welche die Bündel S, S_1, S_2 paarweise mit einander erzeugen. Und da diese Raumcurven als drei ganz beliebige des zweiten Curvensystems von F^3 betrachtet

werden können, so lassen sich die Hauptpunkte von Σ auch folgendermassen definiren:

„Den Hauptpunkten der Ebene Σ entsprechen in der Fläche F^3 „dritter Ordnung die gemeinschaftlichen Sehnen des zweiten „Curvensystems von F^3; wir nennen jede dieser Sehnen einen „Hauptstrahl der Fläche dritter Ordnung.“

Die Hauptpunkte von Σ sind deshalb Doppelpunkte derjenigen Curven fünfter Ordnung, welche den Raumcurven des zweiten Systems von F^3 entsprechen.

Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche F^3 in einer ebenen Curve C_3, welche mit jeder auf F^3 liegenden Geraden einen Punkt gemein hat. Daraus schliessen wir:

„Die Curven dritter Ordnung von Σ, welche den ebenen „Schnittcurven der Fläche F^3 entsprechen, gehen durch alle „Hauptpunkte von Σ.“

Legen wir nun durch eine beliebige Gerade g, welche mit F^3 drei Punkte P, Q, R gemein hat, irgend zwei Ebenen, so schneiden diese die Fläche F^3 in zwei Curven C_3 und C_3^1, welche durch die Punkte P, Q, R gehen. Die Abbildungen von C_3 und C_3^1 haben ausser den drei Punkten, welche jenen dreien entsprechen, noch höchstens sechs Punkte gemein, und jeder der letzteren muss ein Hauptpunkt von Σ sein, weil ihm sowohl in C_3 als auch in C_3^1 ein Punkt entspricht. Diese sechs Hauptpunkte liegen nicht auf einem und demselben Kegelschnitt, weil sonst die drei übrigen in einer Geraden liegen müssten, was unmöglich ist; denn einer Geraden von Σ entspricht in der Fläche F^3 eine Raumcurve dritter Ordnung, welche mit der b e l i e b i g e n Geraden g höchstens zwei Punkte gemein hat. Somit ergiebt sich:

„Die Ebene Σ enthält höchstens sechs Hauptpunkte, welche „nicht auf einem und demselben Kegelschnitt liegen; und die „Fläche F^3 besitzt höchstens sechs Hauptstrahlen oder gemein- „schaftliche Sehnen des zweiten Curvensystems. Wenn drei „collineare Strahlenbündel beliebig im Raume gegeben sind, „so giebt es im Allgemeinen höchstens sechs Grade, in denen „je drei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden.“

Wenn zwei Sehnen einer Raumcurve dritter Ordnung in einer Ebene liegen, so schneiden sie sich bekanntlich in einem Punkte der Curve. Da nun (Seite 201) die Raumcurven des zweiten Curvensystems nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen sollen, so folgt:

„Keine zwei Hauptstrahlen der Fläche F^3 liegen in einer „Ebene.“

Einer beliebigen Geraden g von Σ entspricht in der Fläche F^3 eine Raumcurve γ^3 des ersten Systems; aber:

„Wenn eine Gerade g von Σ einen Hauptpunkt U enthält, „so zerfällt die ihr entsprechende Raumcurve γ^3 dritter Ord- „nung in den zugehörigen Hauptstrahl u und einen Kegelschnitt, „welcher einen Punkt mit u gemein hat.“

Der Punktreihe g entsprechen in den Bündeln S, S_1, S_2 drei Ebenenbüschel, deren Axen den Hauptstrahl u schneiden, und der Ebenenbüschel von S erzeugt mit denjenigen von S_1 und S_2 zwei geradlinige Flächen II. Ordnung, welche die Axe des ersteren Büschels und den Hauptstrahl u gemein haben. Verbinden wir nun irgend drei andere gemeinschaftliche Punkte der beiden Flächen durch eine Ebene, so schneidet diese die Flächen II. Ordnung in zwei Kegelschnitten, welche identisch sind; denn sie haben ausser jenen drei Punkten noch einen auf u und einen auf jener Axe liegenden Punkt mit einander gemein. Die Punkte dieses Kegelschnittes entsprechen aber den Punkten von g projectivisch.

Die Ebene des Kegelschnittes hat mit der Fläche F^3 noch eine Gerade gemein, welche mit dem Kegelschnitt zusammen eine ebene Curve dritter Ordnung ausmacht. Die Abbildung dieser Curve muss in die Gerade g und einen Kegelschnitt zerfallen, und der letztere muss durch alle von U verschiedenen Hauptpunkte der Ebene Σ hindurchgehen. Also:

„Einem Kegelschnitt, welcher irgend fünf Hauptpunkte von „Σ mit einander verbindet, entspricht in der Fläche F^3 eine „Gerade, welche die entsprechenden fünf Hauptstrahlen schneidet; „durch diese Gerade gehen die Ebenen aller Kegelschnitte „von F^3, welche den Strahlen des sechsten Hauptpunktes von „Σ entsprechen.“

Wenn ein gerades Gebilde g zwei Hauptpunkte U und V von Σ mit einander verbindet, so entsprechen ihm in den Bündeln S, S_1, S_2 drei Ebenenbüschel, deren Axen die entsprechenden Hauptstrahlen u und v von F^3 schneiden. Der Ebenenbüschel des Bündels S erzeugt mit denjenigen von S_1 und S_2 zwei Regelflächen, welche die Axe jenes Büschels und die Hauptstrahlen u und v mit einander gemein haben. Ist nun P ein ausserhalb dieser drei Geraden liegender Schnittpunkt der beiden Regel-

flächen, so gehen die letzteren noch durch eine vierte Gerade, welche den Punkt P enthält und die Geraden u und v schneidet; und diese vierte Gerade muss der Geraden g entsprechen; also:

„Jeder Geraden, welche zwei Hauptpunkte U und V von Σ „mit einander verbindet, entspricht in F^3 eine Gerade, welche „die entsprechenden beiden Hauptstrahlen u und v schneidet."

Zugleich ergiebt sich:

„Keine drei Hauptpunkte der Ebene Σ liegen in einer Ge- „raden."

Denn enthielte ein gerades Gebilde g drei Hauptpunkte, so würden die ihm entsprechenden Ebenenbüschel von S, S_1, S_2 zu derjenigen Regelschaar perspectivisch liegen, welcher die zugehörigen drei Hauptstrahlen von F^3 angehören. Die Fläche F^3 würde alsdann in eine Regelfläche und eine Ebene zerfallen.

Wir wollen diejenige Gerade von F^3, welche der Verbindungslinie von irgend zwei Hauptpunkten U und V entspricht, mit einem beliebigen Punkte P von F^3 durch eine Ebene verbinden. Diese Ebene schneidet die Fläche F^3 in einer Curve C_3 dritter Ordnung, welche aus jener Geraden und einem durch P gehenden Kegelschnitt besteht. Die Abbildung von C_3 in Σ zerfällt in die Gerade $\overline{UV}$ und einen Kegelschnitt, welcher alle von U und V verschiedenen Hauptpunkte enthält, sowie denjenigen Punkt, welcher dem Punkte P entspricht. Da P beliebig auf F^3 gewählt wurde, so ist sein entsprechender Punkt als ein beliebiger Punkt von Σ anzusehen. Wir schliessen daraus:

„Den Kegelschnitten, welche durch vier Hauptpunkte von „Σ gelegt werden können, entsprechen in F^3 wiederum Kegel- „schnitte; die Ebenen der letzteren schneiden sich in der- „jenigen Geraden, welche der Verbindungslinie der letzten „beiden Hauptpunkte entspricht."

Dieser Satz erleidet natürlich eine Aenderung, wenn weniger als sechs Hauptpunkte vorhanden sind.

Wir wollen zunächst den besonders interessanten Fall untersuchen, in welchem die Ebene Σ sechs reelle Hauptpunkte besitzt. Dieselben können als Eckpunkte eines vollständigen Sechsecks betrachtet werden, welchem kein Kegelschnitt umschrieben werden kann. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich:

Jedem der sechs Eckpunkte und jeder der fünfzehn Seiten dieses Haupt-Sechsecks von Σ entspricht eine Gerade der Fläche F^3, *ebenso jedem der sechs Kegelschnitte, welche durch je fünf*

der Eckpunkte gelegt werden können. Die Fläche F³ *dritter Ordnung enthält demnach siebenundzwanzig Gerade.*

Von den auf F^3 enthaltenen Geraden können keine vier zu einer und derselben Regelschaar II. Ordnung gehören; denn sonst würde jeder Leitstrahl der Regelschaar vier Punkte mit der Fläche F^3 gemein haben und folglich ganz auf F^3 liegen, sodass die Fläche dritter Ordnung in eine Regelfläche II. Ordnung und eine Ebene zerfallen würde.

Die gegenseitige Lage der siebenundzwanzig Geraden lässt sich mit Hülfe des vollständigen Sechsecks leicht übersehen. Wir bezeichnen zunächst mit *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* die sechs Hauptpunkte der Ebene Σ, mit μ, ν irgend zwei derselben, und mit (μ) denjenigen Kegelschnitt, welcher durch die fünf von μ verschiedenen Hauptpunkte hindurchgeht. Dann möge a_μ denjenigen Hauptstrahl der Fläche F^3 bezeichnen, welcher dem Hauptpunkte μ entspricht, und b_μ diejenige Gerade, welche dem Kegelschnitt (μ) entspricht; ferner entspreche der Seite $\overline{\mu\nu}$ des Sechsecks eine Gerade $c_{\mu\nu}$ oder $c_{\nu\mu}$ von F^3. Die siebenundzwanzig Geraden sind dann bezeichnet wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$
$$\begin{array}{c} c_{12}\ c_{13}\ c_{14}\ c_{15}\ c_{16} \\ c_{23}\ c_{24}\ c_{25}\ c_{26} \\ c_{34}\ c_{35}\ c_{36} \\ c_{45}\ c_{46} \\ c_{56} \end{array}$$

Theils aus dem Früheren, theils aus der Abbildung der siebenundzwanzig Geraden in der Ebene Σ ergiebt sich dann ohne Weiteres:

„Die Gerade a_μ wird nur von zehn der übrigen sechsund-„zwanzig Geraden geschnitten, nämlich von allen Geraden b, „ausgenommen b_μ, und von allen Geraden c, welche den In-„dex μ besitzen. Ebenso wird b_μ von zehn der übrigen Ge-„raden geschnitten, nämlich von allen a ausser a_μ und von „allen c mit dem Index μ. Die Gerade $c_{\mu\nu}$ wird geschnitten „von den vier Geraden a_μ, a_ν, b_μ, b_ν, sowie von denjenigen „sechs Geraden c, welche weder den Index μ noch den Index „ν besitzen.“

Die Gerade c_{12} z. B. wird von den Geraden a_1, a_2, b_1, b_2, c_{34}, c_{35} u. s. w. geschnitten, weil ihre Abbildung $\overline{12}$ durch die Haupt-

punkte *1*, *2* hindurchgeht und mit den Abbildungen (*1*), (*2*), $\overline{34}$, $\overline{35}$ etc. der übrigen genannten Geraden je einen Punkt gemein hat, der kein Hauptpunkt ist.

„Jede der 27 Geraden wird also von zehn der übrigen ge-„schnitten und bildet mit denselben fünf Dreiecke; sodass die „27 Geraden sich in 135 Punkten δ schneiden und 45 Drei-„ecke △ bilden."

Die zehn Geraden, von welchen a_1 geschnitten wird, bilden z. B. mit a_1 die Dreiecke:

$$a_1\, b_2\, c_{12};\ a_1\, b_3\, c_{13};\ a_1\, b_4\, c_{14};\ a_1\, b_5\, c_{15};\ a_1\, b_6\, c_{16};$$

ebenso schneiden sich in b_1 die Ebenen der fünf Dreiecke:

$$b_1\, a_2\, c_{12};\ b_1\, a_3\, c_{13};\ b_1\, a_4\, c_{14};\ b_1\, a_5\, c_{15};\ b_1\, a_6\, c_{16};$$

und die zehn Geraden, welche c_{12} schneiden, bilden mit c_{12} die Dreiecke:

$$c_{12}\, a_1\, b_2;\ c_{12}\, a_2\, b_1;\ c_{12}\, c_{34}\, c_{56};\ c_{12}\, c_{35}\, c_{46};\ c_{12}\, c_{36}\, c_{45}.$$

Die Geraden a und b haben eine bemerkenswerthe gegenseitige Lage. Je fünf der Geraden a werden von einer der Geraden b geschnitten, und folglich je vier der Geraden a von zwei der Geraden b; auch hat jede Regelfläche, welche drei der Geraden a enthält, noch ausserdem drei Gerade b mit der Fläche F^3 dritter Ordnung gemein. Da nun keine zwei der Geraden a in einer Ebene liegen, so folgt:

„Keine zwei der Geraden b liegen in einer Ebene; je fünf, „vier, drei, zwei, eine der Geraden b werden von resp. einer, „zwei, drei, vier, fünf der Geraden a geschnitten, die Geraden „b haben demnach dieselbe Lage zu den Geraden a, wie diese „zu jenen."

Wir wollen mit Herrn Schläfli eine Gruppe von zweimal sechs Geraden, welche die gegenseitige Lage der Geraden a und b zu einander haben, eine Doppelsechs nennen. Eine Doppelsechs, wie

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

ist also dadurch gekennzeichnet, dass eine beliebige unter ihren zwölf Geraden nur diejenigen fünf von den übrigen eilf schneidet, welche mit ihr weder in derselben Horizontal- noch in derselben Vertical-Spalte stehen. Wir unterscheiden zwei Hälften an der Doppelsechs; in der vorliegenden wird die eine Hälfte von den Geraden a, die andere von den Geraden b gebildet.

Wir können leicht zeigen, dass die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung nicht weniger als 36 solche Doppelsechse mit einander bilden; vorher beweisen wir den Satz:

„Die Gerade b_μ wird nur von denjenigen Geraden c ge-„schnitten, welche den Index μ besitzen. Zwei Gerade c mit „einem gemeinschaftlichen Index μ können nicht in einer Ebene „liegen.“

Würde z. B. b_1 von c_{23} geschnitten, so würden die vier Strahlen c_{23}, a_4, a_5, a_6 derjenigen Regelschaar angehören, von welcher b_1, b_2, b_3 drei Leitstrahlen sind; was unmöglich ist. Und wenn z. B. c_{12} mit c_{13} in einer Ebene läge, so müsste diese Ebene auch die Geraden c_{45}, c_{46}, c_{56} enthalten, weil dieselben c_{12} und c_{13} in verschiedenen Punkten schneiden; die Fläche F^3 dritter Ordnung hätte somit fünf Gerade mit der Ebene gemein, was ebenfalls unmöglich ist.

Ausser der oben angegebenen Doppelsechs können wir nun u. A. die beiden folgenden bilden:

$$\begin{matrix} c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_6 & b_6 \\ c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & a_1 & b_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} c_{23} & c_{31} & c_{12} & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \end{matrix}.$$

Die Geraden c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} der ersteren Doppelsechs bilden sich in der Ebene Σ ab als vier Gerade, welche den Hauptpunkt *1* mit vier anderen Hauptpunkten *2*, *3*, *4*, *5* verbinden; und da wir jeden Hauptpunkt mit einem anderen vertauschen können, so erhalten wir nach Analogie dieser ersteren im Ganzen 15 Doppelsechse. Die Geraden c_{12}, c_{23}, c_{31} der letzteren Doppelsechs entsprechen den Seiten des Dreiecks *123* von Σ; die sechs Hauptpunkte bilden mit einander zwanzig Dreiecke, also lassen sich nicht weniger als zwanzig Doppelsechse nach dem zweiten Schema zusammensetzen.

„Die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung bilden sonach „im Ganzen $1 + 15 + 20 = 36$ Doppelsechse, und jede der „Geraden kommt in 16 dieser Doppelsechse vor.“

Aus der Betrachtung des Sechsecks von Σ, welches zusammen mit den sechs Kegelschnitten (μ) die Abbildung der 27 Geraden darstellt, ergiebt sich ausserdem sofort:

„Je vier Gerade der Fläche F^3, von denen keine zwei sich „schneiden, bestimmen eine Doppelsechs, zu deren einen Hälfte „die vier Geraden gehören.“

Die Fläche dritter Ordnung kann keine 28ste Gerade g enthalten. Denn nehmen wir eine solche Gerade an, so

schneidet dieselbe jedenfalls keine drei der Hauptstrahlen a, weil diese schon von drei der Strahlen b geschnitten werden und keine vier Gerade der Fläche zu einer und derselben Regelschaar gehören können. Ferner wird die Gerade g in der Ebene Σ entweder durch eine Gerade oder durch einen Kegelschnitt abgebildet; denn diejenigen Ebenen des Bündels S, welche mit den homologen Ebenen von S_1 je einen Punkt der Geraden g gemein haben, bilden (Seite 192) einen Ebenenbüschel I. oder II. Ordnung. Daraus folgt, dass die Abbildung jedes Kegelschnitts von F^3, welcher mit g in einer Ebene liegt, entweder ein Kegelschnitt oder eine Gerade sein muss, und durch mindestens vier Hauptpunkte von Σ hindurchgeht. Die Abbildung kann keine Gerade sein, weil eine solche höchstens zwei Hauptpunkte enthält, auch kann sie keiner von den sechs Kegelschnitten (μ) sein, weil diesen die sechs Geraden b entsprechen; wäre sie aber ein Kegelschnitt, der nur vier Hauptpunkte enthielte, so müsste g mit einer der Geraden c identisch sein, weil ihre Abbildung mit der Verbindungslinie der beiden letzten Hauptpunkte zusammenfiele. Die Annahme einer 28sten Geraden g ist deshalb unhaltbar. Wir können dieses Ergebniss auch wie folgt aussprechen:

„Die Ebene jedes auf der Fläche dritter Ordnung enthaltenen „Kegelschnitts geht durch eine der 27 Geraden der Fläche.“

Wir wollen eine beliebige der auf F^3 enthaltenen Doppelsechse bezeichnen durch:

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix}$$

und können dann beweisen:

Durch fünf Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, welche der einen „Hälfte einer solchen Doppelsechs angehören, sind die „27 Geraden der Fläche dritter Ordnung und die Fläche selbst „völlig bestimmt.“

Von der Geraden e_6 werden die fünf gegebenen Strahlen d, und von den übrigen Geraden e werden je vier derselben geschnitten. Die Geraden e sind daher construirbar (I. Abth. Seite 145), und mit ihrer Hülfe finden wir die Gerade d_6, welche die ersten fünf Geraden e schneidet. Ferner schneiden sich die beiden Ebenen $\overline{d_\mu e_\nu}$ und $\overline{d_\nu e_\mu}$ in einer der übrigen fünfzehn Geraden $f_{\mu\nu}$ der Fläche F^3; denn die Schnittlinie $f_{\mu\nu}$ hat mit der Fläche vier, auf resp. d_μ, d_ν, e_μ, e_ν liegende Punkte gemein und ist deshalb ganz auf der Fläche enthalten. Sobald auf diese Weise

die 27 Geraden gefunden sind, kann jede ebene Schnittlinie der Fläche dritter Ordnung mittelst der Punkte construirt werden, in welchen die Schnittebene den 27 Geraden begegnet.

Um eine Doppelsechs im Raum zu construiren, können wir, wie gleichzeitig sich ergiebt, einen Strahl e_6 der einen Hälfte willkürlich annehmen und diesen durch fünf beliebige Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, welche der anderen Hälfte angehören sollen, schneiden. Nur dürfen von den fünf Strahlen d keine zwei in einer Ebene und keine vier in einer Regelfläche liegen.

Durch die vier Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4 und drei beliebige Punkte S, S_1, S_2 des Raumes kann nur eine Fläche dritter Ordnung gelegt werden; dieselbe wird erzeugt durch die drei Strahlenbündel S, S_1, S_2, wenn dieselben collinear so auf einander bezogen werden, dass in d_1, d_2, d_3, d_4 je drei homologe Ebenen sich schneiden. Gingen nämlich durch d_1, d_2, d_3, d_4, S, S_1, S_2 zwei Flächen dritter Ordnung, so müssten dieselben auch die Geraden e_5 und e_6 enthalten, weil diese je vier, auf d_1, d_2, d_3, d_4 gelegene Punkte mit den Flächen gemein haben. Von der Ebene $S S_1 S_2$ würden ferner die Flächen in einer und derselben Curve C_3 dritter Ordnung geschnitten; denn die sechs auf d_1, d_2, d_3, d_4, e_5, e_6 gelegenen Schnittpunkte können mit den drei beliebig gegebenen Punkten S, S_1, S_2 nur durch eine einzige Curve C_3 dritter Ordnung verbunden werden. Eine beliebige neue Ebene endlich, welche mit C_3 irgend drei Punkte A, B, C gemein hat, müsste die beiden Flächen dritter Ordnung ebenfalls in einer und derselben Curve C_3^1 dritter Ordnung schneiden, welche die Punkte A, B, C mit sechs auf d_1, d_2, d_3, d_4, e_5, e_6 gelegenen Punkten verbindet. Denn wenn durch diese neun Punkte mehr als eine Curve dritter Ordnung hindurchginge, so müssten die letzten sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, weil A, B und C auf einer und derselben Geraden enthalten sind; dieses ist aber unmöglich, weil d_1, d_2, d_3, d_4 nicht einer und derselben Regelschaar angehören. Die beiden Flächen dritter Ordnung würden folglich unendlich viele ebene Schnittcurven mit einander gemein haben, was nur möglich ist, wenn sie zusammenfallen.

Wählen wir nun die drei Punkte S, S_1, S_2 beliebig auf der ursprünglich gegebenen Fläche F^3 dritter Ordnung, so fällt jene durch d_1, d_2, d_3, d_4 und S, S_1, S_2 gelegte Fläche dritter Ordnung mit F^3 zusammen. Die vier Strahlen d_1, d_2, d_3, d_4 werden zu Hauptstrahlen der Fläche, und folglich auch d_5 und d_6, weil die

sechs Hauptstrahlen die eine Hälfte einer Doppelsechs ausmachen und weil jede Doppelsechs der Fläche durch vier Strahlen ihrer einen Hälfte völlig bestimmt ist. Daraus folgt:

„Die Fläche F^3 dritter Ordnung kann auf 72 verschiedene „Arten durch drei collineare Strahlenbündel S, S_1, S_2 erzeugt „werden, deren Mittelpunkte beliebig auf F^3 anzunehmen sind. „Man kann nämlich die Bündel so auf einander beziehen, dass „in jeder der sechs Geraden d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, welche eine „Hälfte von einer der 36 Doppelsechse bilden, je drei homologe „Ebenen der Bündel sich schneiden, und erhält dadurch eine „der 72 Erzeugungsarten; den Strahlen d wird hiedurch die „Rolle der sechs Hauptstrahlen zugetheilt. Es giebt demnach „72 Systeme von Raumcurven dritter Ordnung auf der Fläche, „oder 36 Paare von solchen Curvensystemen; nämlich je zwei „Curvensysteme, welche von den beiden Hälften einer Doppel- „sechs herrühren, haben dieselben gegenseitigen Beziehungen, „wie das früher betrachtete erste und zweite Curvensystem."

Wählen wir unter den 45 Dreiecken $\triangle$, welche von den 27 Geraden der Fläche F^3 dritter Ordnung gebildet werden, zwei solche, welche keine der 27 Geraden mit einander gemein haben, so schneiden sich die Ebenen derselben in einer Geraden, und da diese höchstens drei Punkte mit F^3 gemein hat, so treffen sich die Seiten beider Dreiecke paarweise auf ihr in drei Punkten δ. Die drei Verbindungs-Ebenen dieser Seitenpaare bilden ein Dreikant T_1 (oder Steiner'sches Trieder) und schneiden die Fläche F^3 in drei neuen Geraden, welche aus dem eben genannten Grunde gleichfalls in einer Ebene liegen und ein neues Dreieck $\triangle$ bilden. Und die Ebene des letzteren bildet mit denjenigen der beiden zuerst angenommenen Dreiecke $\triangle$ ein zweites Dreikant T, welches „zu dem ersteren T_1 conjugirt" genannt wird. Jedes der beiden conjugirten Dreikante wird von den Ebenen des anderen in drei Dreiecken $\triangle$ geschnitten. Wir können beispielsweise drei Paare von solchen conjugirten Dreikanten durch folgende Gruppen von je neun Geraden darstellen:

$$\begin{matrix} a_1 & b_2 & c_{12} \\ b_3 & c_{23} & a_2 \\ c_{13} & a_3 & b_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_4 & b_5 & c_{45} \\ b_6 & c_{56} & a_5 \\ c_{46} & a_6 & b_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_{14} & c_{25} & c_{36} \\ c_{35} & c_{16} & c_{24} \\ c_{26} & c_{34} & c_{15}. \end{matrix}$$

Drei Gerade einer jeden Gruppe liegen in einer Ebene, wenn sie entweder in derselben Horizontal- oder in derselben Vertical-Spalte stehen. Die drei Vertical-Spalten stellen also die Ebenen des

einen Dreikantes T und die Horizontal-Spalten diejenigen des conjugirten Dreikantes T_1 dar. Die vorliegenden drei Paare conjugirter Trieder enthalten alle 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung.

„Jedes Dreieck $\triangle$ kommt in 16 verschiedenen Triedern „vor, so dass 16 Triederscheitel in seine Ebene fallen."

Das Dreieck hat nämlich mit 12 von den übrigen 44 Dreiecken je eine Seite gemein, weil durch jede der 27 Geraden fünf Dreiecks-Ebenen hindurchgehen. Es bleiben also 32 Dreiecke übrig, von denen jedes mit dem gegebenen ein solches Dreikant bestimmt. Weil aber auch die dritte Ebene des Dreikantes durch eines dieser 32 Dreiecke hindurchgeht, so kommt das gegebene Dreieck nicht in 32, sondern nur in 16 verschiedenen Dreikanten vor. Daraus folgt:

„Die Ebenen der 45 Dreiecke $\triangle$ bilden im Ganzen $\frac{16 \cdot 45}{3} = 240$ „solche Dreikante oder 120 Paare conjugirter Dreikante T „und T_1. Diese Paare ordnen sich zu drei und drei in 40 „Gruppen, von denen jede Gruppe alle 27 Geraden der Fläche „enthält."

Die Existenz der 27 Geraden und alle die letzteren betreffenden Sätze haben wir unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Ebene Σ, auf welche die Fläche dritter Ordnung abgebildet wurde, nicht weniger als sechs Hauptpunkte besitze. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen, und unter der Annahme, dass mindestens eine Gerade g auf der Fläche vorkomme, weitere Eigenschaften derselben beweisen.

Die Ebenen des Büschels g schneiden die Fläche F^3 im Allgemeinen nicht bloss in g, sondern ausserdem in Kegelschnitten, von denen irgend zwei mit α^2 und β^2 bezeichnet werden mögen. Wählen wir nun in F^3 irgend vier Punkte O, P, Q, R, die ausserhalb g, α^2 und β^2 und nicht alle in einer Ebene liegen, so können wir dieselben mit α^2 durch eine einzige Fläche II. Ordnung verbinden; denn O, P, Q, R können mit irgend fünf Punkten von α^2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden (Seite 153), welche dann alle Punkte des Kegelschnittes α^2 enthalten muss. Diese Fläche II. Ordnung wird von derjenigen, welche die Punkte O, P, Q, R mit β^2 verbindet, in einer Raumcurve k^4 vierter Ordnung geschnitten, und letztere geht durch O, P, Q und R hindurch. Sei nun N derjenige Punkt, in welchem die Fläche F^3 zum dritten Male von der Geraden $\overline{OP}$ geschnitten wird; dann können wir

den Büschel der Flächen II. Ordnung, welche in der Raumcurve k^4 sich schneiden, projectivisch so auf den Ebenenbüschel g beziehen, dass den drei durch α^2, β^2, N gehenden Ebenen des letzteren die drei durch resp. α^2, β^2, N gehenden Flächen des ersteren entsprechen. Die beiden Büschel erzeugen eine Fläche F_1^3, welche durch k^4 geht und mit F^3 die Gerade g, die Kegelschnitte α^2 und β^2, sowie die Punkte N, O, P, Q, R gemein hat. Wir können leicht zeigen, dass die Flächen F^3 und F_1^3 identisch sind.

Zunächst ergiebt sich aus der Erzeugungsart der Fläche F_1^3, dass dieselbe von jeder Ebene in einer Curve dritter Ordnung geschnitten wird (Seite 208). Die Ebene $\overline{NOPQ}$ schneidet nun die Flächen F^3 und F_1^3 in zwei Curven dritter Ordnung, welche ausser den Punkten N, O, P, Q noch fünf Punkte gemein haben, nämlich je zwei Punkte von α^2, β^2*) und einen Punkt von g; und da O, P Q ganz beliebig auf der Fläche F^3 gewählt wurden, so müssen jene beiden Curven C_3 dritter Ordnung zusammenfallen. Ebenso hat die Ebene $\overline{NOPR}$ eine und dieselbe Curve C_3^1 dritter Ordnung mit den Flächen F^3 und F_1^3 gemein. Nehmen wir nun eine dritte Ebene beliebig an, welche mit C_3 und C_3^1 je drei und mit α^2 und β^2 je zwei Punkte gemein hat, so schneidet auch diese die Flächen F^3 und F_1^3 in einer und derselben Curve dritter Ordnung, von welcher eilf Punkte bereits bekannt sind. Hieraus aber folgt die Identität der Flächen F^3 und F_1^3, und zugleich der Satz:

„Wird durch irgend einen Kegelschnitt α^2 der Fläche F^3 „dritter Ordnung eine beliebige Fläche II. Ordnung gelegt, so „wird F^3 von dieser im Allgemeinen noch in einer Raumcurve „k^4 vierter Ordnung geschnitten, durch welche ein F^2-Büschel „geht. Von den Flächen dieses Büschels wird F^3 in k^4 und „in Kegelschnitten getroffen, deren Ebenen sich in einer Ge„raden g der Fläche F^3 schneiden. Der F^2-Büschel ist durch „diese Kegelschnitte projectivisch auf den Ebenenbüschel g „bezogen, so dass beide mit einander die Fläche dritter Ordnung „erzeugen. Vier beliebige Punkte O, P, Q, R der Fläche F^3, „welche nicht in einer Ebene liegen, können so oft durch eine „auf F^3 liegende Raumcurve k^4 vierter Ordnung mit einander „verbunden werden, als Gerade auf der Fläche F^3 vorkommen.“

Wenn in dem F^2-Büschel irgend eine Fläche vorkommt, die mit der entsprechenden Ebene des Büschels g keinen Punkt gemein

*) Die Kegelschnitte α^2 und β^2 können offenbar immer so gewählt werden, dass sie mit der Ebene $\overline{OPQ}$ je zwei Schnittpunkte gemein haben.

hat, so enthält die Fläche dritter Ordnung nur solche reelle Gerade, die von g geschnitten werden. Diese Bemerkung kann zum Ausgangspunkte einer Untersuchung derjenigen Flächen dritter Ordnung gemacht werden, welche weniger als 27 reelle Gerade enthalten.

Die Erzeugung der Fläche F^3 dritter Ordnung durch einen F^2-Büschel und einen Ebenenbüschel haben wir bereits früher (Seite 164) untersucht; wir schliessen aus den damals bewiesenen Sätzen:

„Die Kegelschnitte von F^3, deren Ebenen eine Gerade g „der Fläche mit einander gemein haben, schneiden diese Ge„rade in einer involutorischen Punktreihe.“

Die Ebene eines solchen Kegelschnittes berührt die Fläche F^3 in denjenigen beiden Punkten, welche der Kegelschnitt mit der Geraden g gemein hat und welche in g einander zugeordnet sind. Wenn der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt, die mit g ein Dreieck $\triangle$ bilden, so ist seine Ebene eine dreifach berührende; die Fläche dritter Ordnung besitzt also höchstens 45 dreifach berührende Ebenen.

Seien g, g_1, g_2 die Seiten eines auf F^3 liegenden Dreiecks $\triangle$, und α, α_1, α_2 irgend drei Kegelschnitte von F^3, deren Ebenen durch resp. g, g_1, g_2 hindurchgehen und so gewählt sind, dass die drei Kegelschnitte paarweise mit einander zwei Punkte gemein haben. Verbinden wir dann α mit irgend vier Punkten O, P, Q, R, von denen drei auf α_1 und einer auf α_2 liegt, durch eine Fläche II. Ordnung, so geht dieselbe auch durch α_1, weil sie fünf Punkte mit α_1 gemein hat, und aus demselben Grunde durch α_2. Die Raumcurve k^4 vierter Ordnung, von der vorhin die Rede war, zerfällt also bei dieser Wahl der Punkte O, P, Q, R in die beiden Kegelschnitte α_1 und α_2, und jeder Kegelschnitt β der Fläche F^3, welcher mit g in einer Ebene liegt, kann mit α_1 und α_2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden. Ebenso aber kann jeder Kegelschnitt β_1 von F^3, dessen Ebene durch g_1 hindurchgeht, mit β und α_2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden; oder:

„Drei beliebige Kegelschnitte von F^3, deren Ebenen durch „die resp. Seiten eines auf F^3 liegenden Dreiecks $\triangle$ gehen, „können stets durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden.“

Sehr leicht ist folgende Umkehrung dieses Satzes zu beweisen:

„Hat eine Fläche II. Ordnung mit der Fläche F^3 dritter
„Ordnung drei Kegelschnitte gemein, so gehen die Ebenen
„derselben allemal durch die drei Seiten eines Dreiecks $\triangle$
„von F^3."

Zu jedem Dreieck $\triangle$ kann ein ganzes System solcher Flächen II. Ordnung construirt werden, und diese Flächen schneiden jede Dreiecksseite in einer involutorischen Punktreihe, in welcher auch die beiden, auf der Seite liegenden Eckpunkte einander zugeordnet sind. Durch eine beliebige der Flächen II. Ordnung ist nun entweder ein oder kein Eckpunkt des Dreiecks von den beiden anderen getrennt; daraus folgt:

„Entweder gehen durch eine einzige oder durch jede Seite
„des Dreiecks $\triangle$ zwei Ebenen, von denen jede mit F^3 einen
„die Seite berührenden Kegelschnitt gemein hat."

Eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche mit F^3 zwei sich nicht schneidende Gerade a, b gemein hat, schneidet dieselbe ausserdem in einer Raumcurve vierter Ordnung „zweiter Species". Dieselbe unterscheidet sich von derjenigen „erster" Species, durch welche Büschel von Flächen zweiter Ordnung gehen, namentlich dadurch, dass durch sie nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung geht und dass sie mit den Strahlen der einen, durch a und b gehenden Regelschaar dieser Fläche je drei, mit den Strahlen der andern Regelschaar aber nur je einen Punkt gemein hat. Wenn zwei Ebenenbüschel erster Ordnung auf einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projectivisch bezogen sind, so erzeugen sie mit letzterem im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species.

Ausser der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, auf deren Untersuchung wir uns hier beschränkt haben, giebt es noch solche mit ein, zwei, drei oder vier sogenannten Knotenpunkten, in denen alle auf der Fläche enthaltenen Raumcurven dritter Ordnung sich schneiden (Seite 200), sowie die geradlinigen Flächen dritter Ordnung. Eine geradlinige F^3 wird erzeugt durch drei collineare Strahlenbündel von solcher Lage, dass irgend drei homologe Strahlenbüschel derselben zu einem und demselben geraden Gebilde u perspectivische Lage haben. Die Fläche geht zweimal durch die Gerade u und wird von jeder Ebene des Büschels u in noch einer Geraden geschnitten. Wir haben diese geradlinigen Flächen dritter Ordnung bereits im Anhange der ersten Abtheilung besprochen.

Siebenundzwanzigster Vortrag.

Bündel von Flächen zweiter Ordnung.

Drei Flächen zweiter Ordnung, welche nicht in einem F^2-Büschel liegen, bestimmen einen „F^2-Bündel“, d. h. einen Bündel von Flächen zweiter Ordnung. Nämlich jede Fläche zweiter Ordnung, welche mit zwei der gegebenen in einem F^2-Büschel liegt, bestimmt mit der dritten einen neuen F^2-Büschel, dessen sämmtliche Flächen wir zu dem F^2-Bündel rechnen. Wir wollen zeigen, dass dieser Bündel jeden F^2-Büschel enthält, welcher irgend zwei seiner Flächen verbindet, und dass er durch je drei seiner Flächen, die in keinem F^2-Büschel liegen, völlig bestimmt ist.

Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P bezüglich der Flächen eines F^2-Büschels schneiden sich in einer Geraden, und letztere hat mit der Polar-Ebene von P bezüglich einer anderen Fläche zweiter Ordnung einen Punkt P' gemein; die Punkte P und P' sind folglich conjugirt bezüglich jeder F^2, welche mit der letzteren Fläche und irgend einer Fläche des F^2-Büschels in einem neuen F^2-Büschel liegt. Also:

„Einem beliebigen Punkte P ist hinsichtlich eines F^2-„Bündels ein Punkt P' conjugirt; oder die Polar-Ebenen von „P bezüglich aller Flächen des Bündels gehen durch einen „Punkt P'.“

Dieser zu P conjugirte Punkt kann construirt werden, wenn irgend drei in keinem F^2-Büschel liegende Flächen des Bündels gegeben sind. Wenn die drei Flächen mit einander einen Punkt gemein haben, so ist derselbe sich selbst conjugirt und liegt auf allen Flächen des Bündels. Alle durch sieben gegebene Punkte oder durch eine cubische Raumcurve gehenden Flächen zweiter Ordnung bilden demnach einen F^2-Bündel. Die Flächen eines F^2-Bündels haben im Allgemeinen höchstens acht Punkte mit einander gemein, von denen jeder durch die sieben übrigen eindeutig bestimmt ist (Seite 151); dieselben heissen die „Knotenpunkte“ oder „Basispunkte“ des F^2-Bündels. Eine cubische Raumcurve ist die „Knotenlinie“ eines speciellen F^2-Bündels.

„Hinsichtlich eines F^2-Bündels sind den Punkten einer „Geraden u im Allgemeinen die Punkte einer cubischen Raum-

„curve conjugirt; die Polaren der Geraden bezüglich der Flächen „des Bündels sind Sehnen dieser Raumcurve.“

Wenn nämlich ein Punkt P die Gerade u beschreibt, so beschreiben seine Polar-Ebenen in Bezug auf irgend drei Flächen des Bündels drei zu u projectivische Ebenenbüschel, und ihr zu P conjugirter Schnittpunkt P' beschreibt eine cubische Raumcurve, welche nur bei besonderer Lage von u in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Die Axen der drei Ebenenbüschel sind (Seite 92) Sehnen der Raumcurve und zugleich die Polaren von u bezüglich der drei Flächen des Bündels. — Sind P und Q zwei beliebige Punkte von u, so schneiden sich deren Polar-Ebenen bezüglich irgend einer Fläche des Bündels in der Polare von u, also in einer Sehne der Raumcurve; sie verbinden diese Sehne mit den beiden zu P und Q conjugirten Punkten P' und Q' der Raumcurve. Da nun das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve aus je zwei Punkten derselben durch collineare Strahlenbündel projicirt wird, so ergiebt sich:

„Die Polar-Ebenen beliebiger Punkte P, Q, R, ... bezüg-„lich der einzelnen Flächen des F^2-Bündels sind homologe „Ebenen von collinearen Strahlenbündeln P', Q', R' ...“

Ist die collineare Beziehung dieser Strahlenbündel festgestellt, etwa mittelst zwei in dem F^2-Bündel enthaltener F^2-Büschel, so können zu jeder Ebene von P' die entsprechenden Ebenen von Q', R', ... linear construirt werden. Die Fläche des F^2-Bündels, in Bezug auf welche irgend eine durch P' gehende Ebene π die Polare des Punktes P ist, ist demnach völlig bestimmt, weil man hinsichtlich derselben von jedem anderen Punkte Q die Polar-Ebene construiren kann; sie beschreibt einen F^2-Büschel, wenn die Ebene π einen gewöhnlichen Ebenenbüschel beschreibt. Ueberhaupt ergiebt sich:

„Der F^2-Bündel ist projectivisch auf den Strahlenbündel P' „bezogen, wenn jeder seiner Flächen die Polar-Ebene von P „bezüglich derselben zugewiesen ist; und zwar entspricht jeder „Ebene von P' eine Fläche des F^2-Bündels und jedem Ebenen-„büschel I. Ordnung von P' ein F^2-Büschel derselben. Der „F^2-Bündel enthält demnach jeden F^2-Büschel, welcher irgend „zwei seiner Flächen verbindet.“

Weil zwei gewöhnliche Ebenenbüschel von P' allemal eine Ebene mit einander gemein haben, so ergiebt sich weiter:

„Zwei in einem F^2-Bündel enthaltene F^2-Büschel haben „allemal eine Fläche mit einander gemein, nämlich die reelle „oder imaginäre Ordnungsfläche eines reellen räumlichen Polar-„systems. Ein F^2-Bündel ist bestimmt durch je drei seiner „Flächen, die in keinem F^2-Büschel liegen."

Die Polar-Ebenen des Punktes P bezüglich aller durch P gehenden Flächen des F^2-Bündels bilden einen Ebenenbüschel PP'. Also:

„Durch einen beliebigen Punkt P, welchem ein anderer „Punkt P' conjugirt ist, gehen unendlich viele Flächen des „F^2-Bündels; dieselben bilden einen F^2-Büschel, dessen Grund-„curve von der Geraden $\overline{PP'}$ in P berührt wird."

Durch einen nicht auf der Grundcurve liegenden Punkt Q geht eine einzige Fläche dieses F^2-Büschels; dieselbe enthält die Gerade $\overline{PP'}$, wenn Q auf $\overline{PP'}$ liegt. Also:

„Zwei beliebige Punkte P, Q können im Allgemeinen durch „eine einzige Fläche des F^2-Bündels verbunden werden. Durch „jede Gerade, welche zwei conjugirte Punkte P, P' verbindet, „geht eine Fläche des Bündels."

Verbindet man im F^2-Bündel eine beliebige Fläche F_1^2 mit jeder Fläche eines nicht durch F_1^2 gehenden F^2-Büschels, so erhält man alle durch F_1^2 gehenden F^2-Büschel des Bündels. Die Fläche F_1^2 wird demnach von den übrigen Flächen des Bündels nicht in einem Bündel, sondern in einem Büschel von Raumcurven vierter Ordnung geschnitten, und für die auf F_1^2 liegenden Geraden ergiebt sich (vgl. Seite 159):

„Die Flächen des F^2-Bündels schneiden eine beliebig auf „einer von ihnen liegende Gerade in den Punktenpaaren einer „involutorischen Punktreihe; die Ordnungspunkte dieser Punkt-„reihe sind conjugirt hinsichtlich des F^2-Bündels."

Da alle durch einen Punkt P gehenden Flächen des Bündels einen F^2-Büschel bilden, so müssen die durch P gehenden Geraden dieser Flächen Sehnen der Grundcurve dieses Büschels sein. Umgekehrt liegt jede Sehne dieser Curve auf einer Fläche des Büschels (Seite 149); und weil die Curve aus P durch eine Kegelfläche dritter Ordnung projicirt wird (Seite 214), so ergiebt sich:

„Die Geraden aller Flächen des F^2-Bündels bilden einen „Strahlencomplex dritten Grades; zu demselben gehören die „Strahlen aller Knotenpunkte des F^2-Bündels. Die Verbin-

„dungslinien der Knotenpunkte sind Doppelstrahlen dieses „Complexes.“

Von einer beliebigen Ebene wird der F^2-Bündel in einem Kegelschnittnetze geschnitten, dessen Strahlenpaare auf den die Ebene berührenden Flächen des Bündels liegen. Bekanntlich liegen die Berührungspunkte auf einer Curve C^3 dritter Ordnung, die Strahlenpaare aber umhüllen eine Curve dritter Classe (I. Abth. Seite 209).

„Den Punkten einer Ebene φ sind hinsichtlich eines F^2-„Bündels die Punkte einer Fläche F^3 dritter Ordnung conjugirt; „auf F^3 liegen auch die Pole von φ bezüglich aller Flächen „des Bündels, sowie die Mittelpunkte aller in dem F^2-Bündel „enthaltenen Kegelflächen.“

Sucht man nämlich zu jedem Punkte von φ die Polar-Ebenen in Bezug auf irgend drei Flächen des Bündels, so erhält man drei zu φ reciproke und folglich zu einander collineare Strahlenbündel, welche die Fläche F^3 erzeugen. Die Mittelpunkte der Strahlenbündel sind die Pole von φ und liegen auf F^3; sie fallen, wenn die drei Flächen Kegelflächen sind, mit deren Mittelpunkten zusammen. In ihren Schnittpunkten mit F^3 wird die Ebene φ von unendlich vielen Flächen des F^2-Bündels berührt; die Berührungspunkte liegen in einer Curve C^3 dritter Ordnung und sind paarweise conjugirt hinsichtlich des Bündels. Den Punkten einer Geraden von φ sind diejenigen einer cubischen Raumcurve von F^3 conjugirt; die Raumcurven dritter Ordnung, welche auf diese Weise den Geraden von φ entsprechen, bilden das erste Curvensystem der Fläche F^3. Die Pole von φ bezüglich aller einem F^2-Büschel des Bündels angehörigen Flächen liegen in einer cubischen Raumcurve des zweiten Curvensystems von F^3. Die Mittelpunkte aller Flächen des F^2-Bündels liegen als Pole der unendlich fernen Ebene gleichfalls auf einer Fläche dritter Ordnung.

„Die Mittelpunkte aller in einem F^2-Bündel enthaltenen „Kegelflächen zweiter Ordnung liegen im Allgemeinen in einer „Raumcurve C^6 sechster Ordnung, welche die Kerncurve des „F^2-Bündels heissen möge.“

Nämlich den Punkten von zwei beliebigen Ebenen φ und γ sind hinsichtlich des F^2-Bündels die Punkte von zwei Flächen F^3 und G^3 dritter Ordnung conjugirt, welche jene Mittelpunkte und alle den Schnittpunkten von φ und γ conjugirten Punkte mit einander gemein haben. Die letzteren Punkte liegen auf einer Raumcurve dritter Ordnung; die Schnittlinie von F^3 und G^3 aber ist eine

Raumcurve neunter Ordnung (Seite 215), und zerfällt in diese cubische Raumcurve und die im Satze genannte Raumcurve C^6 sechster Ordnung. Jedem Punkte der letzteren, welche, wenn F^3 und G^3 sich längs einer Linie berühren, sich auf eine Curve von niedrigerer Ordnung reducirt, ist ein Punkt von φ und zugleich ein anderer Punkt von γ, also die Verbindungslinie beider Punkte conjugirt; woraus folgt:

„Jedem Punkte K der Kerncurve C^6 sind hinsichtlich des „F^2-Bündels alle Punkte einer Geraden k conjugirt; und wenn „irgend einem Punkte K eine Gerade k conjugirt ist, so liegt „er auf der Kerncurve.“

Bewegt sich auf dieser Geraden k ein Punkt P, so beschreiben dessen Polar-Ebenen in Bezug auf irgend drei Flächen des Bündels drei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen durch K gehen. Im Allgemeinen kommt deshalb P dreimal in solche Lage, dass seine Polar-Ebenen durch eine und dieselbe Gerade gehen (I. Abth. Seite 108), d. h. es liegen auf k im Allgemeinen drei Punkte von C^6, und deren conjugirte Gerade gehen durch K. Wir wollen die Gerade k eine „Doppelsehne“ von C^6 nennen, und erhalten den Satz:

„Bezüglich des F^2-Bündels ist jedem Punkte der Kerncurve „C^6 eine Doppelsehne derselben conjugirt. Auf jeder Doppel- „sehne liegen im Allgemeinen drei Punkte von C^6 und durch „jeden Punkt von C^6 gehen im Allgemeinen drei Doppelsehnen „dieser Raumcurve.“

Auf C^6 liegt jeder Punkt, dessen Polar-Ebenen in Bezug auf irgend zwei Flächen des F^2-Bündels zusammenfallen; denn nimmt man eine dritte Fläche des Bündels hinzu, so ergiebt sich sofort, dass dem Punkte alle Punkte einer Geraden conjugirt sind.

„Der Kerncurve C^6 ist demnach das gemeinschaftliche Pol- „tetraeder von je zwei Flächen des F^2-Bündels eingeschrieben.“

Weil in einem F^2-Büschel im Allgemeinen höchstens vier Kegelflächen enthalten sind (Seite 156), so ergiebt sich:

„Die Polar-Ebenen eines beliebigen Punktes P bezüglich „aller Kegelflächen eines F^2-Bündels umhüllen eine Kegelfläche „vierter Classe.“

Dieselbe ist, beiläufig gesagt, die allgemeine Kegelfläche vierter Classe.

Unter den speciellen F^2-Bündeln ist derjenige von besonderem Interesse, dessen Flächen sich in einer Geraden g schneiden. Von

drei beliebigen Flächen dieses Bündels schneidet jede die beiden übrigen in g und in zwei cubischen Raumcurven, welche g zur gemeinschaftlichen Sehne, und folglich ausserhalb g im Allgemeinen und höchstens vier Punkte G mit einander gemein haben (Seite 93). Daraus folgt:

„Der specielle F^2-Bündel, dessen Flächen durch eine Ge„rade g gehen, hat ausserhalb g im Allgemeinen höchstens „vier Knotenpunkte G, die auf allen seinen Flächen liegen."

Weil zwei beliebige Punkte im Allgemeinen durch eine einzige Fläche des F^2-Bündels verbunden werden können, und weil anderseits durch neun Punkte, von denen drei auf g liegen, eine und im Allgemeinen nur eine (die Gerade g enthaltende) Fläche zweiter Ordnung gelegt werden kann, so ergiebt sich:

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche eine Gerade g mit „vier beliebig ausserhalb g angenommenen Punkten G ver„binden, bilden einen speciellen F^2-Bündel; derselbe enthält „vier Ebenenpaare."

Jedes der vier Ebenenpaare besteht aus einer Ebene, welche drei von den vier Punkten G, und aus derjenigen Ebene, welche den vierten Punkt G mit g verbindet. Die Kerncurve dieses speciellen Bündels zerfällt in die vier Schnitt- oder Doppellinien dieser vier Ebenenpaare und die Gerade g. Jeder Punkt von g ist der Mittelpunkt einer Kegelfläche des F^2-Bündels.

Achtundzwanzigster Vortrag.

Das F^2-Gebüsch, seine projectivische Beziehung auf ein räumliches System und die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung.

Vier Flächen zweiter Ordnung, welche nicht in einem F^2-Bündel liegen, bestimmen ein „F^2-Gebüsch" oder Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung. Nämlich je zwei Flächen zweiter Ordnung, welche mit drei der gegebenen in einem F^2-Bündel liegen, bestimmen mit der vierten einen neuen F^2-Bündel, dessen sämmtliche Flächen wir zu dem F^2-Gebüsche rechnen. Jeder dieser durch die vierte Fläche gehenden F^2-Bündel hat demnach mit

dem durch die übrigen drei Flächen bestimmten F^2-Bündel einen F^2-Büschel, und letzterer hat mit jedem in dem einen oder anderen Bündel liegenden F^2-Büschel eine Fläche zweiter Ordnung gemein (Seite 231). Der F^2-Bündel, welchen die vierte gegebene Fläche mit irgend zwei Flächen des F^2-Gebüsches bestimmt, enthält folglich auch Flächen des durch die anderen drei gegebenen Flächen bestimmten F^2-Bündels, und gehört somit zu dem F^2-Gebüsche. Daraus folgt:

„Das F^2-Gebüsch enthält jeden F^2-Büschel, welcher irgend „zwei seiner Flächen verbindet, also auch jeden F^2-Bündel, „welcher durch beliebige drei seiner Flächen bestimmt ist; es „ist durch je vier seiner Flächen, die in keinem F^2-Bündel „liegen, ebenso wie durch die zuerst angenommenen vier Flächen „bestimmt. Ein F^2-Büschel und ein F^2-Bündel des Gebüsches „haben allemal eine Fläche desselben mit einander gemein."

Wenn zwei Punkte in Bezug auf die ersten vier Flächen zweiter Ordnung conjugirt sind, so sind sie hinsichtlich des F^2-Gebüsches, d. h. in Bezug auf alle Flächen desselben conjugirt (Seite 229). Wenn insbesondere ein Punkt auf den ersten vier Flächen liegt, also sich selbst conjugirt ist, so gehen durch ihn alle Flächen des F^2-Gebüsches. Beispielsweise bilden alle durch sechs beliebige Punkte gehenden Flächen zweiter Ordnung ein specielles F^2-Gebüsch. Die noch specielleren F^2-Gebüsche, in Bezug auf welche jeder Punkt des Raumes einem anderen Punkte oder sich selbst conjugirt ist, schliessen wir von unserer Untersuchung aus.

„Die Polar-Ebenen beliebiger Punkte P, Q, R, . . . bezüg„lich der einzelnen Flächen des F^2-Gebüsches sind homologe „Ebenen collinearer räumlicher Systeme";

vorausgesetzt, dass keiner dieser Punkte sich selbst oder einem anderen Punkte hinsichtlich des Gebüsches conjugirt ist. Beschreibt nämlich eine Fläche des Gebüsches einen F^2-Büschel oder F^2-Bündel, so beschreiben die Polar-Ebenen von P und Q bezüglich derselben zwei homologe Ebenenbüschel oder -Bündel der im Satze erwähnten collinearen Räume (vgl. Seite 230). — Weist man jeder Fläche des F^2-Gebüsches die Polar-Ebene von P bezüglich derselben als entsprechende zu, so ergiebt sich:

„Das F^2-Gebüsch ist auf ein räumliches System Σ_1 pro„jectivisch so bezogen, dass jeder seiner Flächen eine Ebene „von Σ_1 entspricht und jedem seiner F^2-Büschel ein zu dem-

„selben projectivischer Ebenenbüschel erster Ordnung von Σ_1.
„Jeder Raumcurve vierter Ordnung, in welcher zwei Flächen „des Gebüsches sich schneiden, entspricht in Σ_1 eine Gerade „als Schnittlinie der zugehörigen beiden Ebenen; jeder Gruppe „von acht Punkten, in welchen drei beliebige Flächen des Ge-„büsches sich schneiden und die wir associirte Punkte „nennen wollen, entspricht in Σ_1 der Schnittpunkt der ent-„sprechenden drei Ebenen."

Umgekehrt entspricht einer beliebigen Geraden von Σ_1 im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung des F^2-Gebüsches, und einem beliebigen Punkte von Σ_1 eine Gruppe von acht associirten Punkten; doch sind diese acht Schnittpunkte von drei Flächen des Gebüsches und jene Raumcurve nicht immer reell. Auch die Flächen des Gebüsches, welche den Ebenen von Σ_1 entsprechen, können zum Theil durch räumliche Polarsysteme vertreten sein, die keine reelle Ordnungsflächen haben (vgl. Seite 231).

Durch einen beliebigen Punkt gehen unendlich viele Flächen des Gebüsches, nämlich von jedem F^2-Büschel desselben eine; alle diese Flächen aber bilden einen F^2-Bündel, und ihnen entsprechen im Raume Σ_1 die Ebenen eines Strahlenbündels. Also:

„Einem im F^2-Gebüsche beliebig angenommenen Punkte „und seinen associirten Punkten entspricht allemal ein Punkt „des Raumes Σ_1. Zwei Gruppen associirter Punkte können „durch eine Raumcurve vierter Ordnung verbunden werden, „weil die entsprechenden beiden Punkte von Σ_1 auf einer Ge-„raden liegen; ebenso sind drei Gruppen associirter Punkte „allemal auf einer Fläche des Gebüsches enthalten. Drei be-„liebige Punkte können im Allgemeinen durch eine einzige „Fläche des Gebüsches verbunden werden; derselben entspricht „die Verbindungs-Ebene der zugehörigen drei Punkte von Σ_1."

Wenn ein Punkt A irgend eine Gerade u beschreibt, so beschreiben seine Polar-Ebenen in Bezug auf vier beliebige Flächen des F^2-Gebüsches vier projectivische Ebenenbüschel; im Allgemeinen kommt deshalb der Punkt höchstens viermal in solche Lage, dass seine vier Polar-Ebenen sich in einem und demselbem Punkte A' schneiden (Seite 93). Wenn irgend einem Punkte bezüglich eines in dem Gebüsche enthaltenen F^2-Bündels eine Gerade conjugirt ist, so ist ihm hinsichtlich des F^2-Gebüsches ein Punkt dieser Geraden conjugirt. Also:

„Diejenigen Punkte, welche paarweise conjugirt sind hin-„sichtlich des F^2-Gebüsches, liegen auf einer Fläche K^4 vierter „Ordnung. Dieselbe enthält die Kerncurven aller in dem Gebüsche „enthaltenen F^2-Bündel (Seite 232), also auch die Mittelpunkte „aller Kegelflächen des F^2-Gebüsches, und wird nach Jacob „Steiner die Kernfläche des Gebüsches genannt."

Weil ein F^2-Büschel im Allgemeinen höchstens vier Kegelflächen enthält, so umhüllen die Polar-Ebenen des beliebigen Punktes P bezüglich aller Kegelflächen des F^2-Gebüsches eine Fläche vierter Classe; oder

„Den Kegelflächen des F^2-Gebüsches entsprechen in dem „Raume Σ_1 die Berührungs-Ebenen einer Fläche Φ^4 vierter „Classe; dieselbe ist eindeutig auf die Kernfläche K^4 bezogen, „indem jeder Berührungs-Ebene von Φ^4 der Mittelpunkt M „der zugehörigen Kegelfläche auf K^4 entspricht."

Wir können nun zeigen, dass Φ^4 von der Berührungs-Ebene in demjenigen Punkte M_1 des Raumes Σ_1 berührt wird, welcher dem Punkte M des F^2-Gebüsches entspricht, dass also jedem Punkte der Kernfläche K^4 nicht nur eine Berührungs-Ebene von Φ^4, sondern zugleich deren Berührungspunkt entspricht. Nämlich einer beliebigen Geraden g_1 der Berührungs-Ebene entspricht auf der zugehörigen Kegelfläche des Gebüsches eine Raumcurve vierter Ordnung; letztere aber hat den Punkt M_1 zum Doppelpunkte und schneidet in ihm zweimal die Kernfläche K^4, wenn g_1 durch M_1 geht. In diesem Falle hat also g_1 mit der Fläche von Σ_1, welche der Kernfläche des Gebüsches entspricht, zwei im M_1 sich vereinigende Punkte gemein, und berührt dieselbe in M_1; jene Fläche von Σ_1 hat mit anderen Worten dieselben Berührungs-Ebenen wie Φ^4. Damit ist der Satz bewiesen:

„Den Punkten der Kernfläche K^4 entsprechen in dem räum-„lichen Systeme Σ_1 die Punkte der Fläche Φ^4 vierter Classe."

Jede Verbindungs-Gerade s von zwei associirten Punkten des F^2-Gebüsches nenne ich einen „Hauptstrahl" desselben. Den beiden associirten Punkten entspricht im Raume Σ_1 ein und derselbe Punkt P_1, einem beliebigen dritten Punkte von s entspricht in Σ_1 ein Punkt Q_1, und der Geraden s_1 von Σ_1, welche P_1 mit Q_1 verbindet, entspricht folglich in dem F^2-Gebüsche eine Raumcurve vierter Ordnung, welche mit s drei Punkte gemein hat, also in s und eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt. Also:

„Jedem Hauptstrahle s des F^2-Gebüsches ist eine Raumcurve „dritter Ordnung associirt, von welcher er eine Sehne ist; „durch ihn geht ein Büschel von Flächen des Gebüsches, und „ihm entspricht in dem räumlichen Systeme Σ_1 eine Gerade s_1."

Einem beliebigen Ebenenbüschel von Σ_1, dessen Axe mit s_1 keinen Punkt gemein hat, entspricht ein F^2-Büschel des Gebüsches; derselbe wird von s in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, deren Punktenpaare den einzelnen Punkten von s_1 entsprechen. Daraus folgt:

„Die Hauptstrahlen des F^2-Gebüsches sind Träger von „involutorischen Punktreihen, deren Punktenpaare aus je „zwei associirten Punkten bestehen; sie werden von den Flächen „des Gebüsches in eben diesen Punktenpaaren geschnitten. „Die beiden sich selbst associirten Ordnungspunkte einer solchen „involutorischen Punktreihe sind conjugirt hinsichtlich des „F^2-Gebüsches und liegen folglich auf der Kernfläche K^4. „Alle Flächen des Gebüsches, welche durch einen sich selbst „associirten Punkt gehen, berühren in ihm den Hauptstrahl s, „welcher ihn mit dem ihm conjugirten Punkte verbindet."

In dem später zu betrachtenden besonderen Falle, in welchem alle Flächen des Gebüsches einen Punkt mit einander gemein haben, machen übrigens die durch diesen Punkt gehenden Hauptstrahlen eine Ausnahme von diesen Sätzen. Aus dem vorhergehenden Beweise folgt noch:

„Jede Gerade s, welcher in Σ_1 eine Gerade s_1 entspricht, „ist ein Hauptstrahl des F^2-Gebüsches."

Den durch s_1 gehenden Ebenen von Σ_1 entsprechen die durch s gehenden Flächen des F^2-Gebüsches, welche sich in dem Hauptstrahle s und der ihm associirten cubischen Raumcurve schneiden. Weil s eine Sehne dieser Raumcurve ist, so giebt es unter jenen Flächen im Allgemeinen zwei Kegelflächen; denselben entsprechen zwei durch s_1 gehende Berührungs-Ebenen der Fläche Φ^4, deren Berührungspunkte beide auf s_1 liegen, weil sie den auf s liegenden Mittelpunkten der beiden Kegelflächen entsprechen (Seite 237). Daraus folgt:

„Jedem Hauptstrahle s des F^2-Gebüsches entspricht in Σ_1 „eine Doppeltangente der Fläche Φ^4 vierter Classe."

Dieser Satz ist umkehrbar, wenn die Tangenten von Φ^4 definirt werden als Schnittlinien unendlich nahe benachbarter Berührungs-Ebenen der Fläche.

Acht associirte Punkte des F^2-Gebüsches können zu zweien durch 28 Hauptstrahlen verbunden werden; denselben entsprechen 28 durch einen Punkt gehende Doppeltangenten der Fläche Φ^4. Durch einen auf Φ^4 liegenden Punkt M_1 gehen höchstens 22 Doppeltangenten dieser Fläche, weil von den acht entsprechenden associirten Punkten zwei in einem sich selbst associirten Punkte M zusammenfallen; sechs von diesen 22 Doppeltangenten liegen in der Ebene, welche in M_1 die Fläche Φ^4 berührt, und sind als sechs Paare unendlich nahe benachbarter Doppeltangenten aufzufassen.

„Die Doppeltangenten der Fläche Φ^4 bilden demnach ein „Strahlensystem 28ster Ordnung (12ter Classe), und Φ^4 ist „nach Kummer's Bezeichnung die Brennfläche dieses Systems, „d. h. der Ort aller Punkte und aller Ebenen, für welche zwei „Strahlen des Systems zusammenfallen."

Durch einen beliebigen Punkt im F^2-Gebüsche gehen höchstens sieben Hauptstrahlen desselben, weil der Punkt höchstens sieben associirte Punkte hat.

„Jeder Geraden l im F^2-Gebüsche, welche keine associirten „Punkte verbindet, entspricht in Σ_1 ein zu l projectivischer „Kegelschnitt λ_1."

Legt man nämlich durch drei Punkte A_1, B_1, C_1 von Σ_1, deren entsprechende A, B, C auf l liegen, eine Ebene, so entspricht dieser eine durch l gehende Fläche des Gebüsches und der Geraden l entspricht folglich eine in jener Ebene liegende Linie λ_1. Beziehen wir aber zwei Ebenenbüschel, deren Axen beliebig durch A_1 und B_1 gelegt sind, so auf einander, dass in jedem dritten Punkte C_1 von λ_1 zwei homologe Ebenen sich schneiden, so sind dieselben projectivisch, weil die ihnen entsprechenden F^2-Büschel des Gebüsches dadurch perspectivisch auf die Punktreihe l bezogen sind (Seite 162); demnach ist λ_1 ein zu l projectivischer Kegelschnitt. In zwei Gerade kann λ_1 nicht zerfallen (Seite 238).

„Der einer Geraden l entsprechende Kegelschnitt λ_1 von Σ_1 „berührt die Fläche Φ^4 im Allgemeinen in vier Punkten M_1; „dieselben entsprechen den Punkten M, welche die Kernfläche „K^4 mit l gemein hat."

Legt man nämlich durch einen dieser Punkte M eine beliebige Fläche des F^2-Gebüsches, so schneidet dieselbe in M und einem zweiten Punkte N die Gerade l, und ihr entspricht in Σ_1 eine Ebene, welche mit dem Kegelschnitt λ_1 zwei Punkte M_1 und N_1 gemein hat; ist aber jene Fläche eine Kegelfläche mit dem Mittel-

punkte M, so fällt N mit M zusammen, und die ihr entsprechende Berührungs-Ebene von Φ^4 tangirt folglich den Kegelschnitt λ_1 in ihrem Berührungspunkte M_1. — Einer beliebigen Linie $\varkappa$ im F^2-Gebüsche, welche die Kernfläche K^4 in n Punkten schneidet, entspricht ebenso eine Linie $\varkappa_1$ in Σ_1, welche in den zugehörigen n Punkten die Fläche Φ^4 berührt; doch ist $\varkappa_1$ doppelt oder dreifach u. s. w. zu zählen, wenn die Punkte der Linie $\varkappa$ zu zweien oder dreien u. s. w. associirt sind, sodass z. B. jedem Hauptstrahle s des F^2-Gebüsches eine doppelt gelegte Gerade s_1 entspricht.

Wenn eine Fläche des F^2-Gebüsches in zwei Ebenen zerfällt, so liegt die Schnitt- oder Doppellinie dieses Ebenenpaares auf der Kernfläche K^4. Denn jeder Punkt dieser Doppellinie ist Mittelpunkt M einer in die beiden Ebenen zerfallenden Kegelfläche des Gebüsches. Aus einer früheren Bemerkung (Seite 237) folgt ohne Weiteres:

„Jedem Ebenenpaare des F^2-Gebüsches entspricht in Σ_1 „eine singuläre Berührungs-Ebene der Fläche Φ^4; nämlich „Φ^4 wird von dieser Ebene in allen Punkten des Kegel„schnittes berührt, welcher der Doppellinie des Ebenenpaares „entspricht.“

Wir wenden uns nunmehr zu der von Steiner entdeckten Fläche vierter Ordnung dritter Classe, welche mit der projectivischen Beziehung zwischen dem F^2-Gebüsche und dem räumlichen Systeme Σ_1 in nahem Zusammenhange steht. Wenn im F^2-Gebüsche ein Punkt sich stetig bewegt und irgend eine Curve oder Fläche beschreibt, so bewegt auch der entsprechende Punkt in Σ_1 sich stetig und beschreibt die entsprechende Curve oder Fläche von Σ_1.

„Einer im F^2-Gebüsche beliebig angenommenen Ebene φ „entspricht nun in Σ_1 eine Steiner'sche Fläche F_1^4 vierter „Ordnung, welche doppelt unendlich viele Kegelschnitte ent„hält; dieselbe ist eindeutig auf die Ebene φ bezogen, sodass „jedem Punkte von φ ein einziger Punkt von F_1^4, und umgekehrt „einem beliebigen Punkte von F_1^4 im Allgemeinen ein und nur „ein Punkt von φ entspricht.“

Die Fläche F_1^4 hat mit einer beliebigen Geraden von Σ_1 höchstens vier Punkte gemein, weil die der Geraden entsprechende Raumcurve vierter Ordnung mit der Ebene φ höchstens vier Punkte gemein hat. Einer beliebigen Geraden l von φ aber entspricht ein auf F_1^4 liegender Kegelschnitt λ_1.

Den die Ebene φ berührenden Flächen des F^2-Gebüsches entsprechen in Σ_1 die Berührungs-Ebenen der Fläche F_1^4. Durch eine beliebige Gerade gehen aber im Allgemeinen höchstens drei Berührungs-Ebenen von F_1^4, weil ein beliebiger F^2-Büschel im Allgemeinen höchstens drei die Ebene φ berührende Flächen enthält (Seite 149). Also:

„Die Steiner'sche Fläche F_1^4 vierter Ordnung ist von der „dritten Classe.“

Ist l irgend eine Gerade von φ und λ_1 der ihr entsprechende Kegelschnitt von F_1^4, so hat die Ebene von λ_1 im Allgemeinen noch einen zweiten Kegelschnitt λ_1' mit F_1^4 gemein; denn ihr entspricht im F^2-Gebüsche eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung, welche mit der Ebene φ die Gerade l und folglich noch eine zweite Gerade l' gemein hat, und im Punkte ll' die Ebene berührt. Also:

„Die Steiner'sche Fläche F_1^4 wird von den Ebenen, in „welchen ihre Kegelschnitte paarweise liegen, in je einem „gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnittpaare berührt.“

Weil alle diese Kegelschnitte λ_1, λ_1' die Fläche Φ^4 im Allgemeinen in je vier Punkten berühren (Seite 239), so ergiebt sich:

„Die Steiner'sche Fläche F_1^4 berührt die Fläche Φ^4 vierter „Classe längs einer Raumcurve (achter Ordnung), welche der „Schnittlinie der Ebene φ und der Kernfläche K^4 des Gebüsches „entspricht.“

Dem Punkte B_1, in welchem F_1^4 von der Ebene der Kegelschnitte λ_1 und λ_1' berührt wird, entspricht in φ der Schnittpunkt B der Geraden l und l'; jedem anderen gemeinschaftlichen Punkte U_1 der Kegelschnitte λ_1 und λ_1' entsprechen zwei verschiedene Punkte U und U' der Geraden l und l'. Diese beiden Punkte U, U' sind associirte Punkte des F^2-Gebüsches und dem sie verbindenden Hauptstrahle entspricht eine Gerade in Σ_1, durch deren Punkte die Fläche F_1^4 zweimal hindurchgeht. Die Kegelschnitte λ_1 und λ_1' haben ausser B_1 höchstens drei Punkte mit einander gemein: also:

„Die beliebige Ebene φ enthält höchstens drei Hauptstrahlen „des F^2-Gebüsches und mindestens einen Hauptstrahl; das von „den Hauptstrahlen gebildete Strahlensystem ist demnach von „der dritten Classe und der siebenten Ordnung.“

Wenn in φ drei Hauptstrahlen liegen, so sind deren Schnittpunkte drei associirte Punkte; denn jedem dieser Schnittpunkte O

sind in den beiden durch ihn gehenden Hauptstrahlen zwei Punkte associirt, deren Verbindungslinie ebenfalls ein Hauptstrahl ist und mit dem dritten Hauptstrahle der Ebene zusammenfallen muss.

„Die Steiner'sche Fläche F_1^4 enthält folglich mindestens „eine und höchstens drei Doppelpunkts-Gerade; dieselben „schneiden sich in einem dreifachen Punkte O_1 der Fläche."

Den ebenen Schnittlinien der Steiner'schen Fläche F_1^4 entsprechen in der Ebene φ Kegelschnitte, welche mit den in φ liegenden Hauptstrahlen je zwei associirte Punkte gemein haben; diese Kegelschnitte nämlich liegen auf denjenigen Flächen des F^2-Gebüsches, welche den Ebenen der Schnittlinien entsprechen (vgl. Seite 238). Auch die Geraden l, l' von φ, welche irgend zwei in einer Berührungs-Ebene liegenden Kegelschnitten λ_1, λ'_1 von F_1^4 entsprechen, haben mit jedem in φ liegenden Hauptstrahle zwei associirte Punkte A, A' gemein; und wenn l sich um A dreht, so muss l' sich um A' drehen. Nun werden zwei beliebige dieser Geraden l' durch den Strahlenbüschel A projectivisch auf einander bezogen; die ihnen entsprechenden, durch einen Doppelpunkt A_1 gehenden Kegelschnitte λ'_1 von F_1^4 werden folglich durch die Kegelschnitte λ_1 und deren Ebenen projectivisch auf einander bezogen. Daraus folgt:

„Die Berührungs-Ebenen der Steiner'schen Fläche, welche „eine ihrer Doppelpunkts-Geraden in irgend einem Punkte A_1 „schneiden, bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung."

Dieser Ebenenbüschel ist sowohl zu dem Strahlenbüschel A als auch zu A' projectivisch. Die beiden von l und l' beschriebenen Strahlenbüschel A, A' sind also auch projectivisch; sie erzeugen einen Kegelschnitt, dessen Punkten die Berührungspunkte jener Ebenen auf F_1^4 entsprechen.

Wenn der Punkt A sich selbst associirt ist, so fällt A' mit ihm zusammen; die projectivischen Strahlenbüschel A, A' von φ sind in diesem Falle concentrisch, und haben im Allgemeinen zwei Strahlen entsprechend gemein. In jedem dieser beiden Strahlen wird die Ebene φ von einer Kegelfläche des F^2-Gebüsches berührt; in den Punkten des entsprechenden Kegelschnittes wird deswegen F_1^4 von einer Berührungs-Ebene der Fläche Φ^4 tangirt. Daraus, und weil die in φ liegenden Hauptstrahlen je zwei sich selbst associirte Punkte enthalten, ergiebt sich:

„Die Steiner'sche Fläche F_1^4 hat im Allgemeinen vier sin„guläre Berührungs-Ebenen, von welchen sie in den Punkten „je eines Kegelschnittes berührt wird."

Diese vier singulären Berührungs-Ebenen sind imaginär, wenn die sich selbst associirten Punkte irgend eines in φ liegenden Hauptstrahles imaginär sind. Enthält die Ebene φ drei reelle Hauptstrahlen, und sind deren sich selbst associirten Punkte alle sechs reell, so bilden letztere, wie man leicht beweist, die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, in dessen Seiten φ von vier Kegelflächen des F^2-Gebüsches berührt wird.

Von jeder durch eine ihrer Doppelpunkts-Geraden u_1 gelegten Ebene wird die Steiner'sche Fläche in einem Punkte von u_1 berührt und zugleich in u_1 und einer durch den dreifachen Punkt O_1 gehenden Curve zweiter Ordnung geschnitten. Der Ebene entspricht nämlich eine Fläche des F^2-Gebüsches, welche durch den entsprechenden Hauptstrahl u geht und folglich die Ebene φ in einem Punkte von u berührt, indem sie dieselbe in u und einer anderen Geraden schneidet.

Projicirt man die Steiner'sche Fläche aus ihrem dreifachen Punkte O_1 durch einen Strahlenbündel, so entspricht jedem Strahle desselben derjenige Punkt von φ, dessen entsprechenden der Strahl projicirt. Jeder Geraden l von φ entspricht in dem Bündel O_1 eine zu l projectivische Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch die Doppelpunkts-Geraden von F_1^4 geht; jedem Strahlenbüschel von O_1 entspricht ein Kegelschnitt von φ, welcher durch die Schnittpunkte O der in φ liegenden Hauptstrahlen geht. Daraus kann man schliessen:

„Die Steiner'sche Fläche wird aus ihrem dreifachen Punkte „durch einen Strahlenbündel projicirt, welcher auf die Ebene „φ quadratisch bezogen ist.“

Die oben aufgestellte projectivische Beziehung zwischen dem F^2-Gebüsche und dem räumlichen Systeme Σ_1 führt noch zu anderen Flächen vierter Ordnung. So entspricht jeder in Σ_1 angenommenen Fläche zweiter Ordnung L_1^2 eine Fläche vierter Ordnung L^4 in dem F^2-Gebüsche; denn L^4 hat mit einer Geraden ebenso viele Punkte gemein, wie L_1^2 mit dem entsprechenden Kegelschnitte von Σ_1, also höchstens vier, wenn die Gerade nicht ganz auf L^4 liegt. Einer Ebene, welche L_1^2 in einem Punkte berührt, entspricht eine Fläche des Gebüsches, welche L^4 in den entsprechenden associirten Punkten berührt. Die Fläche L_1^2 kann durch zwei reciproke Strahlenbündel erzeugt werden; ebenso kann L^4 auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke F^2-Bündel des Gebüsches erzeugt werden, sodass jede Fläche des einen Bündels von der ent-

sprechenden Raumcurve vierter Ordnung des anderen in höchstens acht Punkten der Fläche L^4 geschnitten wird. Ist L_1^2 eine geradlinige Fläche, also erzeugt durch projectivische Ebenenbüschel, so kann L^4 auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische F^2-Büschel erzeugt werden. Ist insbesondere L_1^2 eine Kegelfläche zweiter Ordnung, so entsprechen dem Mittelpunkte derselben im Allgemeinen acht conische Doppelpunkte auf der Fläche L^4.

„Zwei projectivische F^2-Büschel erzeugen im Allgemeinen „eine Fläche L^4 vierter Ordnung; dieselbe enthält zwei Schaaren „von Raumcurven vierter Ordnung. Zwei beliebige Raumcurven „der einen oder der anderen Schaar sind allemal die Grund-„curven von zwei projectivischen F^2-Büscheln, welche die Fläche „L^4 erzeugen.“

Der Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Vorhergehenden, wenn man berücksichtigt, dass zwei F^2-Büschel allemal durch ein F^2-Gebüsch verbunden werden können. Da L^4 von einer beliebigen Ebene in einer Curve vierter Ordnung geschnitten wird, so ergiebt sich beiläufig:

„Zwei projectivische Kegelschnittbüschel, die in einer Ebene „liegen, erzeugen im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung; „dieselbe kann auf unendlich viele Arten durch projectivische „Kegelschnittbüschel erzeugt werden.“

Neunundzwanzigster Vortrag.

Besondere Fälle des F^2-Gebüsches.

Wir wenden uns nunmehr dem besonderen Falle zu, in welchem alle Flächen des F^2-Gebüsches einen Punkt A oder auch mehrere Punkte mit einander gemein haben. Der gemeinschaftliche Punkt A gehört zu jeder Gruppe associirter Punkte; er ist jedem anderen Punkte des Gebüsches associirt und entspricht jedem Punkte des räumlichen Systems Σ_1.

„Jede durch A gehende Gerade s ist ein Hauptstrahl des „F^2-Gebüsches; ihr entspricht in Σ_1 eine zu s projectivische „Gerade s_1.“

Verbindet man nämlich zwei Punkte von Σ_1, welche irgend zwei Punkten von s entsprechen, durch eine Gerade s_1, so entspricht derselben im F^2-Gebüsche eine Raumcurve vierter Ordnung, welche mit s drei Punkte gemein hat, also in s und eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; und betrachtet man s_1 als Schnitt eines Ebenenbüschels von Σ_1, so wird s der Träger einer zu dem entsprechenden F^2-Büschel perspectivischen und folglich zu s_1 projectivischen Punktreihe.

Es giebt deshalb in s_1 einen Punkt A_1, welchem in s nur der Punkt A entspricht, und zwar doppelt, sodass jeder durch A_1 gehenden Ebene von Σ_1 eine den Hauptstrahl s in A berührende Fläche des F^2-Gebüsches entspricht. Zwei beliebig durch A gelegten Strahlen s entsprechen nur dann, wenn sie auf einer Fläche des Gebüsches liegen, zwei sich schneidende Gerade s_1; die Punkte A_1 dieser Geraden sind deshalb im Allgemeinen von einander verschieden. Jeder Ebene von Σ_1, welche durch zwei der Punkte A_1 geht, entspricht eine Fläche des Gebüsches, welche die zugehörigen beiden Hauptstrahlen s und also auch deren Ebene im Punkte A berührt; der Ebene α_1, welche beliebige drei der Punkte A_1 verbindet, muss demnach eine Fläche zweiter Ordnung entsprechen, welche im Punkte A drei verschiedene Berührungs-Ebenen hat, d. h. eine reelle oder imaginäre Kegelfläche mit dem Mittelpunkte A. Daraus folgt:

„Alle Punkte A_1 von Σ_1, welchen der gemeinschaftliche Punkt „A des F^2-Gebüsches doppelt entspricht, liegen in einer Ebene α_1; „derselben entspricht im Gebüsche eine Kegelfläche zweiter „Ordnung mit dem Mittelpunkte A."

In einer beliebigen Ebene von Σ_1 liegen im Allgemeinen und höchstens zwei von den Geraden s_1, welche den durch A gehenden Hauptstrahlen s des Gebüsches entsprechen; denn der Ebene entspricht eine Fläche des Gebüsches, auf welcher im Allgemeinen höchstens zwei dieser Strahlen s_1 liegen. Weisen wir jedem Strahle s von A denjenigen Punkt von α_1 zu, welcher auf der entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1 liegt, so entspricht jeder Geraden von α_1 eine Ebene von A, nämlich die gemeinschaftliche Berührungs-Ebene derjenigen Flächen zweiter Ordnung, welche den durch die Gerade gehenden Ebenen entsprechen. Daraus folgt:

„Diejenigen Doppeltangenten der Fläche Φ^4 vierter Classe, „welche den durch A gehenden Hauptstrahlen des F^2-Gebüsches

„entsprechen, bilden ein Strahlensystem zweiter Classe, von „welchem Φ^4 die Brennfläche ist; dasselbe wird von der Ebene „α_1 in einem zu dem Strahlenbündel A collinearen ebenen „Systeme geschnitten. — Das Strahlensystem zweiter Classe „ist von der $8 - n$ten Ordnung, wenn die Flächen des Ge„büsches ausser A noch $n - 1$ Punkte mit einander gemein „haben."

Zum Beweise dieses Zusatzes bemerken wir, dass einem beliebigen Punkte P_1 von Σ_1 im Allgemeinen höchstens acht associirte Punkte entsprechen, von welchen n auf allen Flächen des Gebüsches liegen; nur denjenigen Strahlen von A, welche durch die übrigen $8 - n$ Punkte gehen, entsprechen Strahlen des Strahlensystems, welche durch P_1 gehen.

Der Kegelfläche des F^2-Gebüsches, welche A zum Mittelpunkt hat, entspricht in der zum Bündel A collinearen Ebene α_1 ein zu ihr projectivischer Kegelschnitt, und ihren Strahlen entsprechen im Raume Σ_1 Strahlen der Ebene α_1. Letztere ist demnach eine „singuläre" Ebene des Strahlensystems zweiter Classe; die in ihr enthaltenen Strahlen des Systems bilden im Allgemeinen einen Strahlenbüschel sechster Ordnung, d. h. eine beliebige Gerade von Σ_1 schneidet höchstens sechs von ihnen, weil die entsprechende Raumcurve vierter Ordnung mit der Kegelfläche A ausser ihrem Mittelpunkte höchstens sechs Punkte gemein hat. Ein beliebiger Strahl von A schneidet die Kernfläche K^4 ausser in A noch in den beiden Punkten, welche er mit der ihm associirten Raumcurve dritter Ordnung gemein hat; von diesen beiden Punkten aber fällt der eine mit A zusammen, wenn der Strahl und folglich auch die ihm associirte Raumcurve auf der Kegelfläche A des Gebüsches liegt. Daraus folgt:

„Der Punkt A ist ein conischer Knotenpunkt der Kern„fläche K^4 und sein Tangentenkegel ist eine Fläche des F^2-„Gebüsches. Die Ebene α_1 anderseits ist eine singuläre Be„rührungs-Ebene der Fläche Φ^4 vierter Classe; sie berührt „diese Fläche in allen Punkten des Kegelschnittes, welcher „jenem Tangentenkegel in α_1 entspricht."

Während einem beliebigen Punkte der Kernfläche K^4 nur ein einziger Punkt von Φ^4 entspricht, haben alle Punkte dieses Kegelschnittes den Knotenpunkt A von K^4 zum entsprechenden Punkte.

„Einer beliebig durch den Punkt A gelegten Ebene φ ent„spricht in dem räumlichen Systeme Σ_1 eine geradlinige Fläche

„F_1^3 dritter Ordnung; dieselbe ist auf die Ebene φ eindeutig „bezogen und kann in Verbindung mit der Ebene α_1 als eine „Steiner'sche Fläche vierter Ordnung aufgefasst werden.“

Die Fläche F_1^3 hat nämlich mit einer beliebigen Geraden von Σ_1 höchstens drei Punkte gemein, weil die entsprechende Raumcurve vierter Ordnung des F^2-Gebüsches höchstens drei von A verschiedene Punkte mit φ gemein hat. Wird φ durch Drehung eines Hauptstrahles s beschrieben, so beschreibt der entsprechende Strahl s_1 die Fläche F_1^3, indem er an einer Geraden u_1 der Ebene α_1 entlang gleitet; die Punktreihe u_1 ist projectivisch zu dem von s beschriebenen Strahlenbüschel. Einer beliebigen Geraden l von φ entspricht auf F_1^3 ein zu l projectivischer Kegelschnitt λ_1 (Seite 239), dessen Ebene durch eine der „Erzeugenden“ s_1 von F_1^3 geht; dieser Ebene nämlich entspricht im F^2-Gebüsche eine Fläche zweiter Ordnung, welche mit φ die Gerade l und folglich noch eine durch A gehende Gerade s gemein hat. Die Ebene von λ_1 berührt die Fläche F_1^3 in dem einen Schnittpunkte von s_1 und λ_1, welchem der Punkt sl entspricht; dem anderen Schnittpunkte von s_1 und λ_1 entsprechen auf s und l zwei associirte Punkte, und der Verbindungslinie v der letzteren entspricht eine Doppelpunkts-Gerade v_1 der Fläche F_1^3. Da der in φ liegende Strahlenbüschel A von den übrigen Geraden l der Ebene φ in projectivischen Punktreihen geschnitten wird, so ergiebt sich:

„Die Kegelschnitte λ_1 der geradlinigen Fläche F_1^3 werden „durch die Erzeugenden s_1 derselben projectivisch auf ein„ander und auf die Punktreihe u_1 bezogen; die Fläche kann „also durch das gerade Gebilde u_1 und einen zu u projectivi„schen Kegelschnitt erzeugt werden.“

Von dieser Erzeugungsart ausgehend haben wir diese Fläche dritter Ordnung bereits früher (I. Abth. Seite 179) besprochen. Wir beschränken uns deshalb hier auf wenige Bemerkungen. Durch die Ebenen des Büschels u_1 werden die Erzeugenden von F_1^3 und die Punkte aller auf F_1^3 liegenden Kegelschnitte involutorisch gepaart, sodass je zwei einander zugeordnete Erzeugende resp. Punkte mit u_1 in einer Ebene liegen und erstere sich in einem Punkte der Doppelpunkts-Geraden v_1 schneiden. Zugleich werden die Strahlen des in φ liegenden Büschels A involutorisch gepaart, sodass je zwei einander zugeordnete Strahlen desselben durch zwei associirte Punkte von v gehen. Enthält die involutorische Punktreihe v zwei Ordnungspunkte M, N, so entsprechen

den Geraden $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$ zwei „singuläre“ Erzeugende von F_1^3 und den Punkten M und N zwei „Cuspidalpunkte“. Die Fläche F_1^3 wird in allen Punkten einer solchen singulären Erzeugenden von einer Berührungs-Ebene der Fläche Φ^4 tangirt; die Berührungs-Ebenen der Punkte einer anderen Erzeugenden s_1 dagegen bilden den Ebenenbüschel s_1, welcher zu der Punktreihe der Berührungspunkte projectivisch ist. Jede ebene Schnittlinie von F_1^3 wird in der Ebene φ durch einen Kegelschnitt dargestellt, welcher durch A geht und den Hauptstrahl v in zwei associirten Punkten schneidet.

Weil die Fläche Φ^4 von den Erzeugenden s_1 und den Kegelschnitten λ_1 der Fläche F_1^3 im Allgemeinen in je zwei resp. je vier Punkten berührt wird (Seite 238), so ergiebt sich:

„Die Fläche F_1^3 berührt die Fläche Φ^4 vierter Classe längs „einer Raumcurve (sechster Ordnung), welche der Schnittlinie „der Ebene φ und der Kegelfläche K^4 des F^2-Gebüsches ent„spricht.“

Wenn alle Flächen des F^2-Gebüsches durch zwei Punkte A, B gehen, deren Verbindungslinie c heissen möge, so entspricht allen Punkten dieser Geraden c ein und derselbe Punkt C_1 des Raumes Σ_1. Denn wenn C_1 irgend einem von A und B verschiedenen Punkte von c entspricht, so gehen alle Flächen des F^2-Gebüsches, welche den durch C_1 gehenden Ebenen von Σ_1 entsprechen, durch die Gerade c. Diese Flächen bilden einen speciellen F^2-Bündel (vgl. Seite 234); sie haben ausser c im Allgemeinen und höchstens vier Punkte C mit einander gemein, welche einander und allen Punkten von c associirt sind und dem Punkte C_1 von Σ_1 entsprechen. Die vier Ebenenpaare, welche durch c und die vier Punkte C gelegt werden können, gehören zu diesem speciellen F^2-Bündel und damit auch zu dem F^2-Gebüsche; ihnen entsprechen in Σ_1 vier durch C_1 gehende singuläre Berührungs-Ebenen k_1 der Fläche Φ^4 (Seite 240). Die Punkte A und B sind conische Knotenpunkte der Kernfläche K^4 und Mittelpunkte von zwei durch c gehenden Kegelflächen des Gebüsches, welchen in Σ_1 zwei durch C_1 gehende singuläre Berührungs-Ebenen α_1 und β_1 von Φ^4 entsprechen. Die Kernfläche K^4 geht durch die Gerade c, weil jeder Punkt von c der Mittelpunkt einer Kegelfläche des Gebüsches ist (Seite 234); allen diesen Kegelflächen entsprechen in Σ_1 Ebenen, welche die Fläche Φ^4 im Punkte C_1 berühren, und C_1 ist deshalb ein Knotenpunkt von Φ^4.

Weil zwei beliebig durch A oder B gelegte Gerade des F^2-Gebüsches auf die ihnen in Σ_1 entsprechenden Geraden projectivisch bezogen sind, so ergiebt sich sehr leicht:

„Einer durch die Gerade $\overline{AB}$ oder c gelegten Ebene φ „entspricht im Allgemeinen eine Regelfläche F_1^2 zweiter Ordnung in Σ_1, welche eindeutig auf φ bezogen ist. Die beiden „Regelschaaren von F_1^2 entsprechen den Strahlenbüscheln A „und B von φ und sind zu ihnen projectivisch; der Geraden „c entsprechen zwei durch C_1 gehende und in α_1 und β_1 „liegende Gerade von F_1^2, und einer beliebigen Geraden von φ „entspricht auf F_1^2 ein durch C_1 gehender Kegelschnitt."

Durch die Strahlen des Büschels A werden nämlich zwei beliebige Gerade des Büschels B in projectivischen Punktreihen geschnitten; die entsprechenden beiden Punktreihen von Σ_1 erzeugen die dem Büschel A entsprechende Regelschaar von F_1^2. — Die Fläche F_1^2 kann in Verbindung mit den Ebenen α_1 und β_1 als eine Steiner'sche Fläche vierter Ordnung aufgefasst werden; sie berührt die Fläche Φ^4 längs einer Raumcurve, welche der Schnittlinie von φ mit der Kernfläche K^4 entspricht.

Der Ebene φ_1, welche die Fläche F_1^2 im Punkte C_1 berührt, entspricht eine Fläche des Gebüsches, welche mit φ nur die Gerade c gemein hat, also eine von φ berührte Kegelfläche ist. Wenn φ den Ebenenbüschel c beschreibt, so beschreibt φ_1 einen zu c projectivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung; denn zwei beliebige Ebenen der Strahlenbündel A und B werden von dem Ebenenbüschel c in zwei perspectivischen Strahlenbüscheln geschnitten, und da A auf α_1 und B auf β_1 collinear bezogen ist (Seite 245—6), so entsprechen diesen Büscheln in α_1 und β_1 zwei projectivische Punktreihen, deren Paare homologer Punkte auf den Ebenen jenes Büschels zweiter Ordnung liegen. Zu demselben gehören insbesondere die singulären Berührungs-Ebenen α_1, β_1 sowie die vier k_1, welche den durch c gehenden Ebenenpaaren des Gebüsches entsprechen. Hieraus und aus einer früheren Bemerkung folgt:

„Der Punkt C_1 von Σ_1, welcher der Geraden $\overline{AB}$ oder c „entspricht, ist ein conischer Knotenpunkt der Fläche Φ^4, und „letztere wird in ihm von den Ebenen eines Ebenenbüschels „zweiter Ordnung berührt, welcher auch die sechs singulären „Berührungs-Ebenen α_1, β_1 und vier k_1 der Fläche enthält."

Wir wollen jetzt annehmen, dass alle Flächen des F^2-Gebüsches einem Dreiecke umschrieben seien, in welchem den Eckpunkten

A, B, C die resp. Seiten a, b, c gegenüberliegen. Diesen Seiten entsprechen in Σ_1 drei Punkte A_1, B_1, C_1 und der Verbindungs-Ebene Δ_1 dieser drei Punkte entspricht im F^2-Gebüsche eine Fläche, welche durch a, b und c geht und folglich in die Ebene Δ des Dreiecks ABC und eine andere Ebene zerfällt. Jedem Punkte der Ebene Δ entspricht ein Punkt von Δ_1, und umgekehrt; einer beliebigen Geraden l von Δ entspricht in Δ_1 ein zu ihr projectivischer Kegelschnitt λ_1, welcher durch A_1, B_1 und C_1 geht. Umgekehrt entspricht einer Geraden g_1 von Δ_1 ein durch A, B und C gehender Kegelschnitt von Δ, welcher in BC und eine durch A gehende Gerade g zerfällt, wenn g_1 durch A_1 geht. Die Strahlenbüschel A von Δ und A_1 von Δ_1 sind projectivisch aufeinander bezogen; sie sind Scheine der projectivischen Punktreihen l und λ_1, welche in Δ und Δ_1 einander entsprechen. Ueberhaupt ergiebt sich:

„Die beiden ebenen Punktsysteme Δ und Δ_1 sind quadratisch „verwandt; A, B, C sind die drei Hauptpunkte von Δ und A_1, „B_1, C_1 die zugehörigen drei Hauptpunkte von Δ_1."

Indem wir andere Specialfälle*) des F^2-Gebüsches theils übergehen, theils in den Anhang verweisen, wenden wir uns nunmehr zu dem besonders interessanten Fall, in welchem alle Flächen des Gebüsches durch sechs beliebige Punkte gehen.

Dreissigster Vortrag.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten.**)

Auf Grund der Ergebnisse der letzten beiden Vorträge wollen wir jetzt das specielle F^2-Gebüsch untersuchen, dessen Flächen einem räumlichen Sechseck 123456 oder $h\,i\,k\,l\,m\,n$ umschrieben sind. Weil durch drei beliebige Punkte im Allgemeinen eine

*) Man vergleiche wegen der hier übergangenen Specialfälle meine Abhandlung „über Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung" in Borchardt's Journal für d. r. u. a. Mathematik, Bd. 86.

**) Kummer, über die algebraischen Strahlensysteme. (Abhandlungen der Berliner Akademie, math. Klasse, 1866.)

Fläche des Gebüsches, und anderseits durch neun beliebige Punkte im Allgemeinen eine einzige Fläche zweiter Ordnung hindurchgeht, so ergiebt sich:

„Jede durch die sechs Eckpunkte i gehende Fläche zweiter „Ordnung gehört zu dem F^2-Gebüsche.“

Die Kernfläche K^4 enthält die Mittelpunkte aller durch die sechs Eckpunkte gehenden Kegelflächen zweiter Ordnung; woraus folgt:

„Die Kernfläche K^4 des Gebüsches geht durch die fünfzehn „Kanten $\overline{ik}$ des Sechsecks und durch die zehn Doppellinien „seiner 10 Paar Gegenebenen $\overline{hik}$, $\overline{lmn}$; sie geht ausserdem „durch die Raumcurve dritter Ordnung k^3, welche dem Sechs„eck umschrieben werden kann.“

Wir denken uns das F^2-Gebüsch wieder auf die früher (Seite 235) angegebene Art projectivisch auf ein räumliches System Σ_1 bezogen. Der Punkt (O) von Σ_1, welcher einem beliebigen Punkte der Raumcurve k^3 entspricht, muss dann allen Punkten von k^3 entsprechen, weil jeder durch (O) gelegten Ebene φ_1 von Σ_1 eine Fläche des Gebüsches entspricht, welche durch sieben und folglich durch alle Punkte von k^3 geht. Jedem durch (O) gehenden Strahle von φ_1 entspricht ausser k^3 eine auf dieser Fläche liegende Sehne von k^3. Also:

„Die Punkte der cubischen Raumcurve k^3 sind associirte „Punkte des F^2-Gebüsches und entsprechen alle einem und „demselben Punkte (O) des Raumes Σ_1. Das Sehnensystem „von k^3 ist auf den Strahlenbündel (O) projectivisch bezogen, „und zwar so, dass die collinearen Strahlenbündel, durch welche „es aus den Punkten von k^3 projicirt wird, zu dem Bündel „(O) reciprok sind.“

Den Tangenten von k^3 entsprechen folglich im Bündel (O) die Strahlen einer Kegelfläche zweiter Ordnung, und den durch k^3 gehenden Kegelflächen des Gebüsches, weil sie nur je eine Tangente von k^3 enthalten, die Berührungs-Ebenen dieser Kegelfläche (O). Auch leuchtet ein, dass die Tangenten und Punkte von k^3 auf die Strahlen und Berührungs-Ebenen der Kegelfläche (O) projectivisch bezogen sind.

Jede Sehne von k^3 ist ein Hauptstrahl des F^2-Gebüsches und der Raumcurve k^3 associirt (Seite 238); ihre beiden sich selbst associirten Punkte, welche auf der Kernfläche K^4 liegen, sind conjugirt bezüglich aller Flächen des Gebüsches, also auch in Bezug auf k^3. Die Kernfläche K^4 wird folglich von den Sehnen

der k^3 in je vier harmonischen Punkten geschnitten, von den Tangenten dieser cubischen Raumcurve aber osculirt, sodass k^3 eine „Haupttangentencurve“ von K^4 ist. Der Punkt (0) ist deshalb ein Knotenpunkt der Fläche Φ^4 vierter Classe und sein Tangentenkegel ist die vorhin erwähnte Kegelfläche zweiter Ordnung (0). Ausserdem hat Φ^4 noch fünfzehn Knotenpunkte (ik), welche den 15 Kanten $\overline{ik}$ des Sechsecks entsprechen (Seite 249).

Alle Doppeltangenten der Fläche Φ^4, welche den Strahlen des Sechseck-Punktes *1* entsprechen, bilden ein Strahlensystem *I* zweiter Classe zweiter Ordnung (Seite 246). Dasselbe enthält die Erzeugenden von doppelt unendlich vielen geradlinigen Flächen dritter Ordnung und kann auf fünf Arten durch eine gewöhnliche Regelschaar beschrieben werden, welcher ein Strahlenbüschel des Bündels *1* entspricht (Seite 249). Seine Brennfläche Φ^4 ist eine „Kummer'sche“ Fläche vierter Classe mit 16 Knotenpunkten (0) und (ik); sie ist auf die Kernfläche K^4 eindeutig bezogen und von noch fünf anderen, gleichartigen Strahlensystemen *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, welche den Strahlenbündeln *2*, *3*, *4*, *5*, *6* entsprechen, die Brennfläche.

Diese sechs Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter Classe haben sechzehn gemeinschaftliche singuläre Ebenen; sechs dieser Ebenen (i) entsprechen den sechs Kegelflächen des Gebüsches, durch welche die Raumcurve k^3 aus den Eckpunkten $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ des Sechsecks projicirt werden, die übrigen zehn (ikl) entsprechen den zehn Ebenenpaaren $\overline{ikl}$, $\overline{mnh}$ des Sechsecks. Dem Ebenenpaare $\overline{123}$, $\overline{456}$ z. B. entspricht die singuläre Ebene (123), welche auch mit (456), (213), (231) u. s. w. bezeichnet werden kann.

„Von dem Strahlensysteme *I* zweiter Ordnung zweiter Classe
„enthält jede der 16 singulären Ebenen einen gewöhnlichen
„Strahlenbüschel; der Mittelpunkt des in $(1kl)$ liegenden
„Büschels ist (kl) und derjenige des in (i) liegenden Büschels
„ist $(1i)$ für $i > 1$ und (0) für $i = 1$.“

Nämlich denjenigen Strahlen des Bündels *1*, welche die Sechseckkante $\overline{kl}$ schneiden, entsprechen die durch (kl) gehenden Strahlen der Ebene $(1kl)$, der Sechseckkante $\overline{1i}$ entsprechen (Seite 250) alle durch $(1i)$ gehenden Strahlen der Ebene (i), und den Strahlen der Kegelfläche, welche aus dem Punkte *1* die Raumcurve k^3 projicirt, entsprechen die durch (0) gehenden Strahlen der Ebene (1).

„Die Kummer'sche Fläche Φ^4 hat sechzehn Knotenpunkte (*0*)
„und (*ik*) und sechzehn singuläre Ebenen (*i*) und (*ikl*), welche
„durch das Strahlensystem *I* einander zugeordnet sind wie folgt:
„Knotenpunkte: (*0*) (*12*) (*13*) (*14*) (*15*) (*16*) (*23*) (*24*) ... (*46*) (*56*)
„sing. Ebenen: (*1*) (*2*) (*3*) (*4*) (*5*) (*6*) (*123*) (*124*) ... (*146*) (*156*)."
Jeder singulären Ebene ist der Knotenpunkt zugeordnet, durch welchen alle in der Ebene liegenden Strahlen des Systems *I* gehen. — Die sechs Ebenen (*1*), (*2*), (*3*), (*4*), (*5*), (*6*) gehen durch den Knotenpunkt (*0*); sie bilden ein Sechsseit, welches einer Kegelfläche zweiter Ordnung umschrieben und auf das Sechseck *123456* in der Raumcurve k^3 projectivisch bezogen ist (Seite 251), sodass:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6) \barwedge k^3(123456).$$

Auch durch jeden der übrigen fünfzehn Knotenpunkte (*ik*) gehen sechs von den 16 singulären Ebenen; dieselben berühren ebenfalls eine Kegelfläche zweiter Ordnung (Seite 249) und können mit (*ik1*), (*ik2*), (*ik3*), (*ik4*), (*ik5*), (*ik6*) bezeichnet werden, wenn (*ikk*) die Ebene (*i*) und (*iki*) die Ebene (*k*) bedeutet. Durch den Knotenpunkt (*12*) z. B. gehen die sechs Ebenen (*2*), (*1*), (*123*), (*124*), (*125*) und (*126*), weil die ihnen entsprechenden Flächen des F^2-Gebüsches durch die Sechseckkante $\overline{12}$ gehen.

In jeder der sechzehn singulären Ebenen liegen sechs von den sechzehn Knotenpunkten; z. B. in (*i*) liegen die Knotenpunkte (*i1*), (*i2*), (*i3*), (*i4*), (*i5*), (*i6*), wenn (*ii*) den Punkt (*0*) bedeutet, und in der Ebene (*123*) = (*456*) liegen die sechs Knotenpunkte (*23*), (*31*), (*12*) (*56*), (*64*), (*45*), weil die entsprechende Fläche des F^2-Gebüsches durch die zugehörigen sechs Linien geht. Der Kegelschnitt, längs welchem die Fläche Φ^4 von der singulären Ebene (*123*) oder allgemeiner (*ikl*) berührt wird, geht durch die sechs in der Ebene liegenden Knotenpunkte; ihm entspricht nämlich die Doppellinie eines Ebenenpaares des Gebüsches (Seite 240), und diese schneidet die sechs den Knotenpunkten entsprechenden Sechseckkanten.

„Die 120 Verbindungslinien der 27 Knotenpunkte sind
„identisch mit den 120 Schnittlinien der 16 singulären Ebenen."

Denn z. B. (*0*) und (*12*) liegen beide auf (*1*) und (*2*); (*12*) und (*13*) liegen auf (*1*) und (*123*); ebenso liegen (*12*) und (*34*) auf (*125*) = (*346*) und (*126*) = (*345*).

Der Strahlenbündel *i* ist (Seite 245) collinear auf das ebene System (*i*) bezogen, wenn man jedem Strahle von *i* den Punkt zuweist, in welchem (*i*) von der entsprechenden Geraden des Raumes Σ_1

geschnitten wird. Bezieht man nun die Bündel *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* perspectivisch auf das Sehnensystem der Raumcurve k^3 und somit (Seite 251) reciprok auf den Strahlenbündel (*0*), so werden dadurch auch die Ebenen (*1*), (*2*), (*3*), (*4*), (*5*), (*6*) reciprok auf den Bündel (*0*) und collinear auf einander bezogen. Und zwar liegt jeder Strahl des Strahlensystems *I* in derjenigen Ebene von (*0*), welche dem Schnittpunkte des Strahles mit der Ebene (*1*) entspricht, und jeder Strahl von (*1*) welcher durch den Punkt (*0*) geht, fällt folglich mit dem ihm entsprechenden Strahle des Bündels (*0*) zusammen.

Alle Geraden des Raumes Σ_1, welche in je einer Ebene ε_1 von (*0*) liegen und zugleich durch den entsprechenden Punkt E_1 von (*1*) gehen, bilden einen linearen Strahlencomplex. Denn diejenigen von ihnen, welche durch einen beliebigen Punkt P_1 gehen, bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung, weil sie die Ebene (*1*) auf der dem Strahle $\overline{(0)\,P_1}$ entsprechenden Geraden p' schneiden; und wenn P_1 eine Gerade g_1 beschreibt, so beschreibt p' einen zu g_1 projectivischen Strahlenbüschel, von welchem ein Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht, und die Ebene $\overline{P_1 p'}$ beschreibt folglich einen zu g_1 perspectivischen Ebenenbüschel erster Ordnung. Zu dem linearen Complexe gehören alle Strahlen des Systems *I* zweiter Classe zweiter Ordnung; in dem Nullsysteme, aus dessen Leitstrahlen es besteht, ist demnach jeder Strahl des Systems *I* sich selbst zugeordnet, und jeder Punkt P_1 hat die Verbindungsebene π_1 der beiden durch P_1 gehenden Strahlen des Systems zur Nullebene. Einem Punkte der Brennfläche Φ^4, durch welchen zwei zusammenfallende Strahlen des Systems *I* gehen, ist allemal eine Ebene von Φ^4 zugeordnet, in welcher zwei zusammenfallende Strahlen des Systems liegen (vgl. Seite 239). Also:

„Die sechs Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter Classe „*I, II, III, IV, V, VI*, welche den sechs Strahlenbündeln *1*, „*2*, *3*, *4*, *5*, *6* entsprechen, liegen in sechs verschiedenen linearen „Strahlencomplexen und bestimmen die zugehörigen sechs Null„systeme.*) Die gemeinschaftliche Brennfläche Φ^4 der sechs „Strahlensysteme ist in jedem dieser Nullsysteme sich selbst „zugeordnet, sodass jedem Punkte von Φ^4 eine durch ihn

---

*) Auf diese sechs Nullsysteme oder linearen „Fundamental-Complexe“ hat zuerst (in den Math. Annalen II, S. 199—226) Herr F. Klein aufmerksam gemacht, von welchem auch die meisten der hier folgenden Sätze herrühren.

„gehende Ebene von Φ^4, jedem Knotenpunkte aber eine singuläre „Ebene zugeordnet ist. Die Kummer'sche Fläche Φ^4 vierter „Classe ist folglich von der vierten Ordnung."

Die Zuordnung der 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen in dem Nullsysteme I ist aus der oben (Seite 253) aufgestellten Tabelle ersichtlich. In dem $i$ten der sechs Nullsysteme ist dem Knotenpunkte (kl) die Ebene (ikl) zugeordnet, weil durch (kl) alle in (ikl) liegenden Strahlen des $i$ten Strahlensystems gehen (vgl. Seite 252). Verbindet man die sechs Punkte, welche irgend einer Berührungs-Ebene von Φ^4 in den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, mit dem Berührungspunkte der Ebene, so erhält man sechs in der Ebene liegende Doppeltangenten von Φ^4; ihrem Berührungspunkte ist die Ebene im Allgemeinen nicht zugeordnet.

Dem Sechsseit $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$, welches zu dem Sechseck $1\,2\,3\,4\,5\,6$ auf k^3 projectivisch und einer Kegelfläche zweiter Ordnung umschrieben ist (Seite 253), ist in dem $i$ten der sechs Nullsysteme das Sechseck $(i1)(i2)(i3)(i4)(i5)(i6)$ zugeordnet. Letzteres ist deshalb einem Kegelschnitte so eingeschrieben, dass

$$(i1)(i2)(i3)(i4)(i5)(i6) \barwedge k^3(1\,2\,3\,4\,5\,6), \text{ für } (ii) = (0).$$

In dem $k$ten der sechs Nullsysteme ist aber dieses Sechseck dem Sechsseit $(ik1)(ik2)(ik3)(ik4)(ik5)(ik6)$ zugeordnet, welches folglich ebenfalls zu $k^3(123456)$ projectivisch ist. Und weil diesem Sechsseit, wenn beispielsweise $i = 2$, $k = 3$ gesetzt wird, in dem ersten Nullsysteme das Sechseck $(23)(31)(12)(56)(64)(45)$ zugeordnet ist, so muss auch dieses Sechseck zu $k^3(123456)$ projectivisch sein. Ueberhaupt ergiebt sich:

„Alle Gruppen von je sechs singulären Ebenen, die durch „einen Knotenpunkt gehen, und alle Gruppen von je sechs „Knotenpunkten, die in einer singulären Ebene liegen, sind zu „einander und zu dem Sechseck 123456 auf k^3 projectivisch. „Die sechzehn Knotenpunkte der Kummer'schen Fläche Φ^4 „liegen zu sechsen in sechzehn Kegelschnitten, längs welchen „Φ^4 von den 16 singulären Ebenen berührt wird."

Da je zwei dieser 16 Kegelschnitte sich in zwei Knotenpunkten schneiden (Seite 253), so können sie mit jedem nicht auf ihnen liegenden Knotenpunkte durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden; diese Fläche aber geht durch noch einen zwölften Knotenpunkt und durch vier von den 16 Kegelschnitten. Beispielsweise liegen die zwölf Knotenpunkte der vier Kegelschnitte

(*1*), (*2*), (*134*), (*234*) auf einer Fläche zweiter Ordnung; ebenso diejenigen von (*123*), (*345*), (*561*) und (*246*). Man beweist leicht den Satz:

„Es giebt achtzig Flächen zweiter Ordnung, welche je zwölf „von den 16 Knotenpunkten und je vier von den 16 Berührungs-„Kegelschnitten enthalten, und ebenso achtzig Flächen zweiter „Classe, welche je zwölf von den 16 singulären Ebenen berühren."

Die beiden Punkte, welche einer Ebene in irgend zwei von den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, sind homologe Punkte von zwei collinearen Räumen; letztere aber liegen involutorisch, weil die beiden Punkte einander in doppelter Weise entsprechen. Denn z. B. in den Nullsystemen *I* und *II* sind (*1i*) und (*2i*) der Ebene (*i*), zugleich aber (*2i*) und (*1i*) der Ebene (*12i*) zugeordnet; ferner (*34*) und (*56*) der Ebene (*134*) = (*256*), und umgekehrt (*56*) und (*34*) der Ebene (*156*) = (*234*). Die acht Punktenpaare (*12*) (*0*), (*13*) (*23*), (*14*) (*24*), (*15*) (*25*), (*16*) (*26*), (*34*) (*56*), (*35*) (*46*) und (*36*) (*45*) bestehen demnach aus je zwei einander zugeordneten Punkten eines geschaart-involutorischen Systems *I II*, in welchem jeder gemeinschaftliche Leitstrahl der beiden Nullsysteme *I*, *II* sich selbst, und die Ebene (*1ik*) der Ebene (*2ik*) zugeordnet ist. Solcher involutorischer Systeme giebt es fünfzehn, die wir mit *I II, I III*, . . ., *V VI* bezeichnen. In jedem derselben ist die Kummer'sche Fläche Φ^4 sich selbst zugeordnet; und zwar sind je zwei einander zugeordnete Punkte oder Ebenen der Fläche durch die beiden Axen des Systems harmonisch getrennt. Das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, welches aus den Leitstrahlen des involutorischen Systems *I II* besteht, wird von den collinearen Ebenen (*1*) und (*2*) erzeugt (vgl. Seite 254).

Welcher Knotenpunkt von Φ^4 einer beliebigen singulären Ebene in jedem der sechs Nullsysteme, oder einem beliebigen Knotenpunkte in jedem der 15 involutorischen Systeme zugeordnet ist, ersieht man aus folgender Tabelle:

	(*1*)	(*2*)	(*3*)	(*4*)	(*5*)	(*6*)	(*123*)	(*124*)	(*125*)	(*126*)	(*134*)	(*135*)	(*136*)	(*145*)	(*146*)	(*156*)
I	(*0*)	(*12*)	(*13*)	(*14*)	(*15*)	(*16*)	(*23*)	(*24*)	(*25*)	(*26*)	(*34*)	(*35*)	(*36*)	(*45*)	(*46*)	(*56*)
II	(*12*)	(*0*)	(*23*)	(*24*)	(*25*)	(*26*)	(*13*)	(*14*)	(*15*)	(*16*)	(*56*)	(*46*)	(*45*)	(*36*)	(*35*)	(*34*)
III	(*13*)	(*23*)	(*0*)	(*34*)	(*35*)	(*36*)	(*12*)	(*56*)	(*46*)	(*45*)	(*14*)	(*15*)	(*16*)	(*26*)	(*25*)	(*24*)
IV	(*14*)	(*24*)	(*34*)	(*0*)	(*45*)	(*46*)	(*56*)	(*12*)	(*36*)	(*35*)	(*13*)	(*26*)	(*25*)	(*15*)	(*16*)	(*23*)
V	(*15*)	(*25*)	(*35*)	(*45*)	(*0*)	(*56*)	(*46*)	(*36*)	(*12*)	(*34*)	(*26*)	(*13*)	(*24*)	(*14*)	(*23*)	(*16*)
VI	(*16*)	(*26*)	(*36*)	(*46*)	(*56*)	(*0*)	(*45*)	(*35*)	(*34*)	(*12*)	(*25*)	(*24*)	(*13*)	(*23*)	(*14*)	(*15*)

Z. B. der Ebene (*136*) ist in dem III. Nullsysteme der Knotenpunkt (*16*) und im V. der Punkt (*24*) zugeordnet; diese Punkte (*16*) und (*24*) aber entsprechen einander doppelt in dem involutorischen Systeme *III V*. Auch die projectivische Beziehung der in zwei singulären Ebenen liegenden Gruppen von je sechs Knotenpunkten ist aus der Tabelle ersichtlich; z. B. in den Ebenen (*1*), (*123*) und (*135*) ist:

$$(0)\,(12)\,(13)\,(14)\,(15)\,(16) \barwedge (23)\,(31)\,(12)\,(56)\,(64)\,(45)$$
$$\barwedge (35)\,(46)\,(51)\,(62)\,(13)\,(24).$$

Auch der von Herrn H. Weber*) herrührende Satz, dass aus sechs passend gewählten Knotenpunkten, wie (*12*), (*23*), (*34*), (*45*), (*51*), (*0*) oder (*23*), (*31*), (*12*), (*14*), (*25*), (*36*), alle singulären Ebenen und die übrigen zehn Knotenpunkte linear construirt werden können, ergiebt sich leicht mit Hülfe der Tabelle.

Drei beliebige von den sechs Nullsystemen, z. B. *I*, *II* und *III*, bestimmen drei involutorische Systeme *II III*, *III I* und *I II*, ausserdem aber ein räumliches Polarsystem *I II III*. Sucht man nämlich zu irgend einem Elemente des Raumes die zugeordneten in *I* und *II III*, oder in *II* und *III I*, oder in *III* und *I II*, so erhält man homologe Elemente von zwei reciproken Räumen; diese Räume aber liegen involutorisch und bilden ein räumliches Polarsystem *I II III*, weil unserer Tabelle zufolge den Eckpunkten der acht Tetraeder:

$$(0)\,(23)\,(31)\,(12),\quad (0)\,(56)\,(64)\,(45),$$
$$(23)\,(14)\,(15)\,(16),\quad (56)\,(41)\,(42)\,(43),$$
$$(31)\,(24)\,(25)\,(26),\quad (64)\,(51)\,(52)\,(53),$$
$$(12)\,(34)\,(35)\,(36),\quad (45)\,(61)\,(62)\,(63)$$

die ihnen gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Diese Tetraeder sind aber nicht blos von *I II III*, sondern auch von dem Polarsysteme *IV V VI* Poltetraeder, und das letztere Polarsystem ist folglich mit *I II III* identisch. Ebenso sind *I II IV* und *III V VI* zwei identische Polarsysteme; man erhält acht Poltetraeder derselben, wenn man in den vorstehenden Tetraeder-Ausdrücken die Ziffern *3* und *4* vertauscht. Ueberhaupt bestimmen die sechs Nullsysteme zu dreien zehn verschiedene Polarsysteme; in jedem

---

*) Borchardt's Journal für d. r. u. a. Mathematik, Bd. 84, S. 340. Herr Weber gelangte bei einer Untersuchung über Thetafunctionen zuerst zu der obigen Bezeichnung der Knotenpunkte und singulären Ebenen einer Kummer'schen Fläche.

derselben ist die Kummer'sche Fläche Φ^4 sich selbst zugeordnet, ihre 16 Knotenpunkte sind die Pole ihrer 16 singulären Ebenen und bilden zu vieren acht Poltetraeder.

In Bezug auf die drei Nullsysteme *I*, *II* und *III* gruppiren sich die Punkte und Ebenen des Raumes zu Poltetraedern eines räumlichen Polarsystems *I II III* = *IV V VI*; und zwar sind jedem Eckpunkte eines solchen Tetraeders in den involutorischen Systemen *II III*, *III I* und *I II* die übrigen drei Eckpunkte und in den drei Nullsystemen die durch ihn gehenden Tetraederflächen zugeordnet, und Analoges gilt von jeder Fläche des Tetraeders. In Bezug auf die drei Nullsysteme *IV*, *V*, *VI* gruppiren sich die Punkte und Ebenen zu anderen Poltetraedern desselben Polarsystems. Zwei Tetraeder, welche diesen beiden verschiedenen Gruppirungen angehören und eine gemeinschaftliche Fläche besitzen, haben auch den gegenüberliegenden Eckpunkt mit einander gemein, und ihre anderen sechs Eckpunkte, welche jener Fläche in den sechs Nullsystemen zugeordnet sind, bilden zwei Poldreïecke eines in *I II III* enthaltenen ebenen Polarsystems und liegen folglich auf einem Kegelschnitt (Seite 63). In den sechs Nullsystemen sind sonach einer beliebigen Ebene sechs Punkte eines Kegelschnittes zugeordnet, und einem beliebigen Punkte sechs durch ihn gehende Ebenen eines Ebenenbüschels zweiter Ordnung.

Ein beliebiger Punkt des Raumes bildet mit den fünfzehn Punkten, welche ihm in den 15 involutorischen Systemen zugeordnet sind, eine ähnliche Gruppe von 16 Punkten, wie die 16 Knotenpunkte einer Kummer'schen Fläche. Nämlich die 16 Punkte dieser Gruppe liegen zu sechsen auf 16 Ebenen (genauer: Kegelschnitten), welche ihrerseits zu sechsen durch die 16 Punkte gehen. In den sechs Nullsystemen sind nach dem Vorhergehenden jedem der 16 Punkte die sechs durch ihn gehenden Ebenen zugeordnet, und jeder der 16 Ebenen die sechs auf ihr liegenden Punkte; in den zehn Polarsystemen sind jedem der 16 Punkte die zehn nicht durch ihn gehenden Ebenen, und jeder der 16 Ebenen die zehn nicht auf ihr liegenden Punkte zugeordnet; in den fünfzehn involutorischen Systemen endlich sind jedem der 16 Punkte (oder Ebenen) der Gruppe die 15 übrigen zugeordnet. Die 16 Punkte sind, beiläufig bemerkt, die Knotenpunkte einer durch sie bestimmten Kummer'schen Fläche vierter Ordnung, welche ebenso wie Φ^4 in jedem der sechs Nullsysteme sich selbst zugeordnet ist; und mit Φ^4 sind dreifach unendlich viele andere Kummer'sche Flächen bestimmt.

Die Ordnungsfläche des Polarsystems *I II III* enthält alle Strahlen, welche in jedem der drei Nullsysteme *I*, *II* und *III* sich selbst zugeordnet sind, und folglich auch die drei Paar Axen der involutorischen Systeme *II III*, *III I* und *I II*; denn diese Axen sind Leitstrahlen der von jenen Strahlen gebildeten Regelschaar. Ebenso enthält die Ordnungsfläche alle gemeinschaftlichen Leitstrahlen der Nullsysteme *IV*, *V* und *VI*. Diese Leitstrahlen bilden die Leitschaar der ersteren Regelschaar; denn wenn sie dieselbe Regelschaar bildeten, so gäbe es unendlich viele, in allen sechs Nullsystemen sich selbst zugeordnete Strahlen, und die zehn durch die Nullsysteme bestimmten Polarsysteme hätten identische Ordnungsflächen, während sie doch von einander verschieden sind. Die beiden Axen von *II III* sind folglich in jedem der Nullsysteme *IV*, *V*, *VI* (und *I*) sich selbst zugeordnet, und schneiden die Axenpaare der sechs involutorischen Systeme *IV V*, *IV VI*, ..., *VI I*. Die Axenpaare von je drei involutorischen Systemen, welche (wie *I II*, *III IV* und *V VI*) zusammen von allen sechs Nullsystemen abhängen, bilden demnach die drei Paar Gegenkanten eines Tetraeders. Uebrigens hat entweder eines oder jedes der drei Systeme *II III*, *III I* und *I II* zwei imaginäre Axen, weil die Ordnungsfläche des Polarsystems *I II III*, wenn sie reell und geradlinig ist, nur von je zwei Paar Kanten ihrer Poltetraeder in reellen Punkten geschnitten wird.

Das F^2-Gebüsch, durch welches wir zu der Kummer'schen Fläche Φ^4 gelangt sind, ist bestimmt durch vier Flächen zweiter Ordnung, von welchen drei beliebig durch eine cubische Raumcurve k^3 gehen; von der vierten wird k^3 in den sechs Punkten *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* geschnitten. Jenachdem nun keine, zwei, vier oder sechs von diesen Schnittpunkten reell sind, werden von den sechs zu der Kummer'schen Fläche gehörigen Strahlensystemen zweiter Ordnung und zweiter Classe keine, zwei, vier oder alle sechs reell. Der letzte dieser vier Fälle, zwischen denen eine Anzahl geometrisch evidenter Uebergangsfälle und Ausartungen stehen, liegt den Untersuchungen dieses Vortrages zu Grunde.

Anhang.

Aufgaben und Lehrsätze.

Collineare und reciproke Verwandtschaft.

1. Von zwei collinearen oder zwei reciproken ebenen Systemen sind zwei einander entsprechende Vierecke gegeben. Zu einem beliebigen Punkte des einen Systems den entsprechenden Punkt resp. Strahl des anderen zu construiren, und ebenso zu einem beliebigen Strahle des einen Systems den entsprechenden Strahl resp. Punkt des anderen (Seite 5 bis 7).

2. Von zwei collinearen Systemen, die perspectivisch in derselben Ebene liegen (Seite 17), sind gegeben das Centrum und die Axe der Collineation, sowie zwei einander entsprechende Punkte oder Strahlen. Zu einer beliebigen Curve des einen Systems soll die entsprechende Curve des anderen construirt werden, und ausserdem zu der unendlich fernen Geraden des zweiten Systems die entsprechende Gegenaxe des ersten.

3. Wenn zwei collineare ebene Systeme eine Punktreihe u entsprechend gemein haben und das eine derselben um die Gerade u gedreht wird, so beschreibt der Punkt, in welchem die Verbindungslinien homologer Punkte der Systeme sich schneiden, einen Kreis, dessen Mittelpunkt in dem anderen System liegt und einem unendlich fernen Punkte des ersten beweglichen Systems entspricht, und dessen Ebene auf u senkrecht steht.

4. Wird ein Gegenstand mit einer durchsichtigen Flüssigkeit, etwa mit Wasser, überdeckt, so erscheint er wegen der Brechung des Lichtes anders als in freier Luft. Weil aber jede gerade Linie auch unter der Flüssigkeit als gerade Linie erscheint, und parallele Gerade allemal als parallele sich darstellen, so erscheint der Gegenstand so, als wäre er in einen ihm collinearen, oder genauer gesagt affinen (Seite 54) verwandelt. Ebenso erscheinen einem Fische alle über dem Wasser befindlichen Gegenstände affin

verwandelt, z. B. eine Kugel als Ellipsoid, ein Würfel als schiefes Parallelepipedon.

5. Wenn zwei reciproke ebene Systeme Σ und Σ_1 solche Lage haben, dass ein gerades Gebilde u von Σ perspectivisch ist zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel von Σ_1, so liegt dasselbe gerade Gebilde, wenn es zu Σ_1 gerechnet wird, auch zu dem entsprechenden Strahlenbüschel von Σ perspectivisch. Wenn also die Systeme nicht in derselben Ebene liegen, so geht jede Ebene, welche einen Punkt des einen Systems mit der entsprechenden Geraden des anderen verbindet, durch den Mittelpunkt von einem jener beiden zu u perspectivischen Strahlenbüschel, und die beiden Systeme erzeugen somit zwei Strahlenbündel.

6. Wenn zwei reciproke Systeme Σ und Σ_1 in derselben Ebene liegen und zwar so, dass irgend ein gerades Gebilde u von Σ perspectivische Lage hat zu dem entsprechenden Strahlenbüschel U_1 von Σ_1, so liegt im Allgemeinen noch ein zweites gerades Gebilde v von Σ perspectivisch zu dem entsprechenden Strahlenbüschel V_1 von Σ_1. Rechnen wir alsdann dieselben geraden Gebilde u und v zu dem zweiten Systeme Σ_1, so entsprechen ihnen im ersten Systeme Σ die resp. Strahlenbüschel V_1 und U_1, und zwar liegt u zu V_1 und v zu U_1 perspectivisch. Der Punkt uv ist auf der Geraden $\overline{U_1 V_1}$ enthalten, und entspricht derselben in doppelter Weise. Diese besondere Lage von zwei reciproken Systemen kann benutzt werden, um auf einfache Art zu einem beliebigen Gebilde des ersten Systems, z. B. zu einer Curve, das reciproke Gebilde im anderen Systeme zu construiren. — In besonderen Fällen können die Geraden u und v und zugleich die Punkte U_1 und V_1 sich vereinigen; alsdann entspricht jedem Punkte von u ein Strahl von U_1 in doppelter Weise.

7. Die grösste Anzahl von Wendepunkten, welche eine ebene Curve $n$ter Ordnung besitzen kann, ist gleich der grössten Anzahl von Rückkehrpunkten einer ebenen Curve $n$ter Classe.

8. Zu den Aufgaben 1 und 2 sind analoge Aufgaben für collineare oder reciproke räumliche Systeme aufzustellen und zu lösen (Seite 21 u. 27).

9. Sind zwei collineare räumliche Systeme Σ und Σ_1 nicht affin, so entspricht der unendlich fernen Ebene des einen allemal eine eigentliche Ebene (die sogenannte „Gegen-Ebene“) des anderen Systems. Zwei homologe ebene Systeme von Σ und Σ_1 sind nur dann affin (Seite 46), wenn ihre Ebenen zu den resp. Gegen-

Ebenen von Σ und Σ_1 parallel laufen; ebenso entspricht einer Punktreihe u von Σ nur dann eine ihr projectivisch ähnliche Punktreihe u_1 von Σ_1, wenn u zu der Gegen-Ebene von Σ parallel läuft und also auch u_1 zu derjenigen von Σ_1. Den Geraden, welche auf der Gegen-Ebene von Σ senkrecht stehen, entsprechen in Σ_1 die Strahlen eines Bündels, dessen Mittelpunkt auf der Gegen-Ebene von Σ_1 liegt. Die räumlichen Systeme enthalten daher nur zwei einander entsprechende Gerade n und n_1, von denen jede auf der Gegen-Ebene ihres Systems senkrecht steht. Einem Rotations-Cylinder von Σ, welcher die Gerade n zur Axe hat, entspricht in Σ_1 eine eigentliche Kegelfläche II. Ordnung, welche n_1 zur Hauptaxe hat, und welche mit der Cylinderfläche eine Schnittcurve erzeugt, wenn die Geraden n und n_1 auf einander gelegt werden. Jeder Punktreihe v_1 von Σ_1, deren Träger einen Punkt jener Schnittcurve enthält und die Axe n_1 rechtwinklig schneidet, entspricht dann in Σ eine projectivisch gleiche Punktreihe v; ebenso jeder Punktreihe, deren Träger zu v_1 parallel läuft und von der Gegen-Ebene des Systems Σ_1 denselben Abstand hat wie v_1. Hieraus erkennt man, dass zwei affine ebene Systeme nicht immer projectivisch gleiche homologe Punktreihen enthalten, also auch nicht immer in perspectivische Lage gebracht werden können.

Flächen zweiter Ordnung; Polarsysteme.

10. Zwei Strahlenbündel sind reciprok auf einander bezogen; es sind die Punkte zu bestimmen, welche die von ihnen erzeugte Fläche II. Ordnung mit einer beliebig gegebenen Geraden oder Ebene gemein hat. Diese Aufgabe gehört zu denjenigen des zweiten Grades; ebenso die folgende:

11. Zu untersuchen, ob zwei gegebene reciproke Strahlenbündel ein Ellipsoid, ein Paraboloid, ein Hyperboloid, oder eine Kegelfläche II. Ordnung erzeugen.

12. Eine Gerade g und ein Punkt G_1 bewegen sich mit einander in zwei festen Ebenen Σ und Σ_1, und zwar so, dass sie beständig aus einem ausserhalb der Ebenen gegebenen Punkte S unter rechten Winkeln gesehen werden, also $\overline{Sg}$ auf $\overline{SG_1}$ senkrecht steht. Die Verbindungs-Ebene $\overline{gG_1}$ umhüllt alsdann eine Fläche II. Ordnung (Seite 29 und 39).

13. Sind ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ reciprok auf einander bezogen, und legt man durch jede Gerade

von Σ eine Ebene parallel zu dem entsprechenden Strahle von S und durch jeden Punkt von Σ eine Ebene parallel zu der entsprechenden Ebene von S, so umhüllen alle diese Ebenen ein Paraboloid, welches auch von Σ berührt wird.

14. Sind ein Strahlenbündel S und ein ebenes System Σ collinear auf einander bezogen, und legt man durch jeden Punkt oder Strahl von Σ eine Ebene senkrecht zu der entsprechenden Geraden oder Ebene von S, so umhüllen alle diese Ebenen (wie in 13) ein Paraboloid, welches auch von Σ berührt wird.

15. In zwei collinearen Strahlenbündeln giebt es im Allgemeinen unendlich viele Paare homologer Ebenen, die einander rechtwinklig schneiden; dieselben bilden zwei Ebenenbüschel II. Ordnung. Fällt man nämlich auf die Ebenen des einen Bündels Normalen aus dem Mittelpunkte S des anderen, so wird S das Centrum von zwei reciproken Bündeln; und alle Ebenen von S, welche durch die entsprechenden Normalen gehen, bilden einen jener Ebenenbüschel II. Ordnung (Seite 61).

16. Durch ein einfaches windschiefes Sechseck $ABCDEF$ ist ein räumliches Polarsystem bestimmt, in welchem jedem Eckpunkte des Sechsecks die ihm gegenüberliegende Fläche entspricht. Bezieht man nämlich zwei Räume Σ und Σ_1 reciprok auf einander, sodass den Punkten A, B, C, D, E von Σ die resp. Ebenen CDE, DEF, EFA, FAB, ABC von Σ_1 entsprechen, so entsprechen den Punkten A, E und F von Σ_1 die resp. Ebenen CDE, ABC und BCD von Σ, und die Geraden AB und DE entsprechen einander in doppelter Weise. Die Ebenen ABC, ABE, CDE und DEA bilden folglich ein Tetraeder, in welchem jeder Eckpunkt der ihm gegenüberliegenden Fläche doppelt entspricht, und die reciproken Systeme Σ und Σ_1 liegen involutorisch.

17. Die Berührungspunkte aller Tangenten zu bestimmen, welche aus einem beliebigen Punkte an eine gegebene Fläche II. Ordnung gezogen werden können (Seite 37).

18. Durch eine beliebige Gerade an eine gegebene Fläche II. Ordnung Berührungs-Ebenen zu legen.

19. Auf einer Fläche II. Ordnung ist ein Kegelschnitt gegeben; den Schnittpunkt derjenigen Ebenen zu bestimmen, welche in den Punkten dieses Kegelschnittes die Fläche II. Ordnung berühren.

20. Die Normalen einer Fläche II. Ordnung, welche auf der letzteren in den Punkten einer Curve II. Ordnung senkrecht stehen, sind parallel zu den Strahlen einer Kegelfläche II. Ordnung.

Welche Ausnahme erleidet der Satz, wenn die Ebene der Fusspunkten-Curve eine Durchmesser-Ebene der Fläche II. Ordnung ist?

21. Sind gegeben eine Fläche F^2 II. Ordnung und irgend ein fester Punkt U, so können je zwei Punkte des Raumes einander zugeordnet werden, welche hinsichtlich der Fläche F^2 conjugirt sind und deren Verbindungslinie durch U geht. Dann sind den sämmtlichen Punkten einer beliebigen Ebene φ, welche nicht durch U geht, die sämmtlichen Punkte einer Fläche F_1^2 II. Ordnung zugeordnet. Und zwar enthält F_1^2 den Punkt U und den Pol der Ebene φ, und hat mit der Fläche F^2 nur diejenigen Punkte gemein, welche auf der Ebene φ oder auf der Polar-Ebene von U enthalten sind (vergl. I. Abth. Seite 84). Rückt φ ins Unendliche, so ergiebt sich:

22. Die Halbirungspunkte aller Sehnen, welche aus einem beliebigen Punkte U an eine Fläche F^2 II. Ordnung gezogen werden können, liegen auf einer Fläche F_1^2 II. Ordnung. Dieselbe geht durch U und durch den Mittelpunkt der Fläche F^2, und hat mit F^2 alle ihre unendlich fernen Punkte gemein, sowie die Berührungspunkte aller Tangenten, die von U an F^2 gezogen werden können. Auf der Fläche F_1^2 liegen auch die Mittelpunkte aller Curven II. Ordnung, in welchen die Fläche F^2 von den durch U gehenden Ebenen geschnitten wird.

23. Wie lautet zu Nr. 21 der reciproke Satz?

24. Eine Fläche II. Ordnung durch eine Ebene so zu schneiden, dass der entstehende Kegelschnitt einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat.

25. Die Ebenen aller Kegelschnitte, welche auf einer gegebenen Fläche II. Ordnung liegen und deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Geraden enthalten sind, umhüllen einen parabolischen Cylinder. Welche Ausnahmen erleidet dieser Satz?

26. Der Inhalt eines Tetraeders, von welchem zwei Paar Gegenkanten auf einem hyperbolischen Paraboloid liegen, wird durch das Paraboloid halbirt. Denn jede zu zwei der Gegenkanten parallele Ebene schneidet das Tetraeder in einem Parallelogramm, dessen eine Diagonale auf dem Paraboloid liegt.

27. Die Mittelpunkte aller Tangentenkegel eines Ellipsoides, welche mit den Ebenen ihrer Berührungs-Ellipsen Körper von gegebenem Rauminhalt begrenzen, liegen auf einem zu jenem ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Ellipsoide. Der Beweis dieses Satzes sowie des folgenden ergiebt sich sofort, wenn man das Ellipsoid auf eine Kugel affin bezieht.

28. Das kleinste Ellipsoid, welches einem Tetraeder umschrieben werden kann, wird in dessen Eckpunkten von vier, den gegenüberliegenden Tetraederflächen parallelen Ebenen berührt.

29. Zwei reciproke ebene Systeme Σ, Σ_1 können im Allgemeinen auf vier verschiedene Arten in involutorische Lage gebracht werden. Wir bezeichnen mit C und C_1 die „Centra" von Σ und Σ_1, d. h. diejenigen Punkte, welchen die unendlich fernen Geraden der beiden Systeme entsprechen; dieselben liegen im Allgemeinen nicht unendlich fern. Dem Strahlenbüschel C von Σ entspricht die unendlich ferne Punktreihe von Σ_1, und wenn wir letztere aus C_1 projiciren, so erhalten wir einen zu C projectivischen Strahlenbüschel C_1. Sind nun a, b die beiden zu einander normalen Strahlen des Büschels C, welchen in C_1 zwei zu einander normale Strahlen a_1, b_1 entsprechen (I. Abth. Seite 162), so kann man die reciproken ebenen Systeme auf vier Arten in involutorische Lage bringen, indem man a auf b_1 und zugleich b auf a_1 legt. Bei dieser Lage nämlich entsprechen den Seiten des aus a, b und der unendlich fernen Geraden von Σ gebildeten uneigentlichen Dreiecks die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte (vgl. Seite 61). Liegen die beiden Centra C, C_1 unendlich fern, so hat die Aufgabe in der Regel keine Lösung.

30. *Zwei reciproke Strahlenbündel* S, S_1, *deren Mittelpunkte nicht unendlich fern liegen, in involutorische Lage zu bringen.* — Wir haben in den reciproken Bündeln zwei homologe Dreikante, etwa zwei rechtwinklige, aufzusuchen, die so zur Deckung gebracht werden können, dass jede Kante des einen der ihr entsprechenden Ebene des anderen gegenüberliegt. Zu dem Ende ordnen wir im Bündel S jedem Strahle die zu ihr rechtwinklige Ebene zu, sodass S ein rechtwinkliger polarer Strahlenbündel wird. Dadurch wird zugleich im Bündel S_1 jeder Ebene ein Strahl zugeordnet, sodass auch S_1 ein polarer Bündel wird; und zwar entsprechen je zwei conjugirten Strahlen oder Ebenen von S_1 allemal zwei zu einander normale Ebenen resp. Strahlen von S. Der polare Bündel S_1 hat im Allgemeinen drei zu einander normale Hauptaxen a_1, b_1, c_1, und da dieselben paarweise conjugirt sind, so entsprechen ihnen drei zu einander normale Ebenen α, β, γ des Bündels S. Legt man nun die Bündel so auf einander, dass a_1 mit $\overline{\beta\gamma}$ und b_1 mit $\overline{\gamma\alpha}$ zusammenfällt, was auf vier Arten möglich ist, so ist die verlangte involutorische Lage hergestellt. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen vier, und nur dann unendlich viele Lösungen, wenn der Bündel S_1 unendlich viele Hauptaxen hat.

31. *Zwei reciproke räumliche Systeme* Σ, Σ_1 *in involutorische Lage zu bringen.* — Seien C und C_1 die „Centra“ von Σ und Σ_1, d. h. die Punkte, welchen die unendlich fernen Ebenen der beiden Systeme entsprechen. Liegen diese Centra selbst unendlich fern, so hat die Aufgabe in der Regel keine Lösung. Ist C und damit zugleich C_1 ein eigentlicher Punkt, so entsprechen den Ebenen und Strahlen von C die unendlich fernen Punkte und Geraden von Σ_1, und wenn man letztere aus C_1 projicirt, so sind die Bündel C und C_1 reciprok auf einander bezogen. Bringt man nun (Nr. 30) diese reciproken Bündel in involutorische Lage, so sind auch die reciproken Räume in involutorische Lage gebracht. Die Aufgabe hat demnach wie die vorhergehende im Allgemeinen vier Lösungen.

32. *Auf einer gegebenen Fläche II. Ordnung ist ein Kegelschnitt so zu construiren, dass derselbe einen beliebig angenommenen Punkt* S *zum Brennpunkt hat.* Damit die Aufgabe ausführbar sei, darf S nicht auf der Fläche liegen. In dem ebenen Polarsystem, dessen Ordnungscurve der gesuchte Kegelschnitt ist, müssen je zwei conjugirte Strahlen des Büschels S auf einander rechtwinklig sein. Construiren wir also in dem polaren Strahlenbündel S, von welchem je zwei einander zugeordnete Elemente conjugirt sind bezüglich der Fläche, die cyclischen Ebenen (I. Abth. Seite 156), so haben diese mit der Fläche je einen reellen oder imaginären Kegelschnitt gemein, von welchem S der Brennpunkt ist. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen zwei Lösungen.

Ist die gegebene Fläche II. Ordnung eine Kegelfläche, so können wir die Aufgabe wie folgt lösen. Wir verbinden den Punkt S mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche durch eine Gerade u; dann sind die Ebenen des Büschels u paarweise conjugirt hinsichtlich der Fläche. Die Ebene ε des gesuchten Kegelschnittes muss durch S gehen und den involutorischen Ebenenbüschel u in einem rechtwinkligen Strahlenbüschel schneiden. Solcher Schnitt-Ebenen ε giebt es keine oder zwei, je nachdem der Ebenenbüschel u Ordnungs-Ebenen besitzt oder nicht, je nachdem also der Punkt S ausserhalb oder innerhalb der Kegelfläche liegt. Die beiden Ebenen ε sind im letzteren Falle leicht zu construiren, wenn berücksichtigt wird, dass sie auf einer der beiden zu einander rechtwinkligen conjugirten Ebenen des Büschels u senkrecht stehen müssen. Sie liegen symmetrisch zu der Geraden u, und fallen zusammen, wenn der Ebenenbüschel u ein rechtwinkliger ist.

33. *Eine Fläche II. Ordnung, die einen Mittelpunkt besitzt, wird von zwei Büscheln paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten.* Diese Kreis-Ebenen sind nämlich parallel zu den beiden cyclischen Durchmesser-Ebenen der Fläche, in welchen je zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht stehen. Der gleiche Satz lässt sich auch für das elliptische Paraboloid beweisen. Die Rotationsflächen II. Ordnung besitzen nur eine Schaar von Kreisen, und deren Ebenen sind senkrecht zur Rotationsaxe.

34. *Zwei collineare Strahlenbündel* S, S_1 *in perspectivische Lage zu bringen.* — Zwei perspectivische Bündel haben einen Ebenenbüschel entsprechend gemein; wir suchen deshalb zunächst in den gegebenen Bündeln S, S_1 zwei homologe Ebenenbüschel, die projectivisch gleich sind. Zu dem Ende ordnen wir (wie in Nr. 30) im Bündel S jedem Strahle die zu ihm normale Ebene zu, sodass S ein rechtwinkliger und zugleich S_1 ein polarer Bündel wird; in dem Bündel S_1 bestimmen wir sodann die beiden Focalaxen u_1, v_1. Je zwei zu einander normale Ebenen von u_1 (oder v_1) sind dann conjugirt in dem polaren Bündel S_1, und ihnen entsprechen folglich zwei conjugirte, d. h. zu einander normale Ebenen des rechtwinkligen Bündels S. Sind also α, β, γ, δ vier harmonische Ebenen von u, und ist α zu γ sowie β zu δ normal, so entsprechen ihnen im Bündel S vier harmonische Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1 des Büschels u_1, sodass α_1 zu γ_1 und β_1 zu δ_1 normal ist. Die homologen Ebenenbüschel $u\,(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $u_1\,(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ sind folglich projectivisch gleich und können so aufeinander gelegt werden, dass die vier Ebenen α, β, γ, δ mit den ihnen entsprechenden α_1, β_1, γ_1, δ_1 zusammenfallen. Bei dieser Lage aber sind die collinearen Bündel S und S_1 perspectivisch und Scheine eines und desselben ebenen Systems. Die Aufgabe hat vier Auflösungen, von welchen zu jeder der beiden Focalaxen u_1, v_1 zwei gehören.

35. *Liegt der Mittelpunkt* S *eines polaren Strahlenbündels auf einer Fläche* F^2 *II. Ordnung, so geht die Verbindungs-Ebene solcher drei Punkte* A, B, C *von* F^2, *welcher aus dem Punkte* S *durch drei conjugirte Strahlen des polaren Bündels projicirt werden, durch einen festen Punkt.**) Nämlich zu einem gegebenen Strahle $\overline{SA}$ können unendlich viele Paare von Strahlen $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ construirt werden, welche in dem polaren Bündel nicht nur dem Strahle $\overline{SA}$, sondern auch einander conjugirt sind. Diese

*) Der hier folgende Beweis dieses Steiner'schen Satzes ist von Herrn Schröter (in dem Journal für Mathematik Bd. 64 Seite 70) gegeben worden.

Strahlenpaare liegen in der Polar-Ebene von $\overline{SA}$ und bilden einen involutorischen Strahlenbüschel; sie schneiden die Fläche F^2 in je zwei einander zugeordneten Punkten B, C eines involutorischen Kegelschnittes, und folglich gehen die Verbindungslinien $\overline{BC}$ durch einen und denselben Punkt A_1 und die Ebenen ABC durch eine Gerade $\overline{AA_1}$. Halten wir irgend einen zu $\overline{SA}$ conjugirten Strahl $\overline{SB}$ fest und ändern sodann die Lage der Punkte A und C, so dreht sich die Ebene ABC um eine Gerade $\overline{BB_1}$, die ebenso gefunden werden kann wie vorhin $\overline{AA_1}$; und diese Gerade $\overline{BB_1}$ liegt mit $\overline{AA_1}$ in der anfänglich angenommenen Ebene ABC, wird also von $\overline{AA_1}$ geschnitten. Nun wird aber jede solche Gerade $\overline{AA_1}$ oder $\overline{BB_1}$ auch von demjenigen Strahle t des Bündels S geschnitten, dessen Polar-Ebene die Fläche F^2 im Punkte S berührt. Denn halten wir z. B. A fest und nehmen wir den Punkt B in der Ebene At an, so fällt $\overline{SC}$ in jene Berührungs-Ebene hinein und der Punkt C vereinigt sich mit S; die Ebene ABC, in welcher auch $\overline{AA_1}$ liegt, fällt also mit $\overline{At}$ zusammen, oder $\overline{AA_1}$ und t liegen in einer Ebene. Seien nun A und A' zwei ganz beliebige Punkte der Fläche F^2, und sei $\overline{SB}$ derjenige Strahl des polaren Bündels S, welcher die Ebene $\overline{SAA'}$ zur Polare hat; sei ferner $\overline{A'A'_1}$ die zu $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ analoge Gerade des Punktes A'. Dann müssen $\overline{AA_1}$ und $\overline{A'A'_1}$ jede der Geraden $\overline{BB_1}$ und t schneiden; und da die letzteren in einer Ebene liegen, welche im Allgemeinen nicht durch die beliebig gewählten Punkte A und A' hindurchgeht, so müssen $\overline{AA_1}$ und $\overline{A'A'_1}$ den Schnittpunkt von $\overline{BB_1}$ und t mit einander gemein haben. Die Ebene ABC geht also stets durch einen bestimmten auf t liegenden Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn der anfänglich gewählte Punkt A mit irgend einem anderen Punkte A' der Fläche II. Ordnung vertauscht wird. — Wie lautet der reciproke Satz?

36. Ist S irgend ein Punkt einer Fläche F^2 II. Ordnung, so geht die Verbindungs-Ebene solcher drei Punkte von F^2, welche aus S durch drei zu einander rechtwinklige Gerade projicirt werden, durch einen festen Punkt. Derselbe liegt auf der in S errichteten Normalen der Fläche F^2 (Lehrs. 35).

37. Die Punkte, in denen je drei Berührungs-Ebenen eines Paraboloides sich rechtwinklig schneiden, liegen in einer Ebene (folgt aus dem zu Nr. 35 reciproken Satze).

38. Zwei Flächen F^2 und F_1^2 zweiter Ordnung, von denen entweder jede oder keine geradlinig, aber keine Kegelfläche ist,

sollen collinear so auf einander bezogen werden, dass irgend drei Punkten A, B, C von F^2 drei beliebig angenommene Punkte A_1, B_1, C_1 von F_1^2 entsprechen. Wir setzen voraus, dass weder A, B und C noch A_1, B_1 und C_1 in einer Geraden liegen. Wir können und müssen dann, um die Aufgabe zu lösen, die Ebenen ABC und $A_1B_1C_1$ collinear auf einander beziehen, sodass die Curven II. Ordnung, in welchen sie F^2 und F_1^2 schneiden, einander entsprechen und zugleich den Punkten A, B, C die resp. Punkte A_1, B_1, C_1 (Seite 10). Ausserdem können und müssen wir zwei Punkten D, E von F^2, deren Berührungs-Ebenen sich in irgend einer Geraden der Ebene ABC schneiden, diejenigen beiden Punkte D_1, E_1 von F_1^2 zuweisen, deren Berührungs-Ebenen durch die entsprechende Gerade von $A_1B_1C_1$ gehen. Bezieht man zwei Räume Σ und Σ_1 collinear auf einander, sodass den Punkten A, B, C, D, E von Σ die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 von Σ_1 entsprechen, so sind die Flächen F^2 und F_1^2 homologe Flächen derselben; denn der Fläche F^2 entspricht eine Fläche zweiter Ordnung, die mit F_1^2 nicht nur den durch A_1, B_1 und C_1 gehenden Kegelschnitt, sondern auch alle durch D_1 und E_1 gehenden Kegelschnitte von F_1^2 gemein hat. Die Aufgabe hat, weil D_1 und E_1 mit einander vertauscht werden können, zwei Lösungen. Eine Fläche zweiter Ordnung kann auf unendlich viele Arten collinear auf sich selbst bezogen werden.

Raumcurven dritter Ordnung und geometrische Verwandtschaften zweiten Grades.

39. Ein veränderliches windschiefes Viereck bewege sich so, dass seine vier Seiten a, a_1, a_2, a_3 sich um die resp. festen Punkte S, S_1, S_2, S_3 drehen, und dass drei Eckpunkte aa_1, a_1a_2 und a_2a_3 in den resp. festen Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 fortgleiten. Dann beschreibt der vierte Eckpunkt aa_3 eine durch S und S_3 gehende Raumcurve dritter Ordnung (Seite 87), die drei ersten Eckpunkte aber beschreiben drei Kegelschnitte, und alle vier Curven gehen durch den Schnittpunkt der drei Ebenen ε_1, ε_2, ε_3. Der Satz erleidet Ausnahmen, wenn die vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 in einer Ebene liegen, oder wenn die drei Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 in einer Geraden sich schneiden. Wie lautet der analoge Satz für ein veränderliches $n$eck im Raume?

40. Drei beliebige Ebenenbüschel u, u_1, u_2 seien so auf einander bezogen, dass jede Ebene von u auf den entsprechenden beiden

Ebenen von u_1 und u_2 senkrecht steht. Dann liegen die Schnittpunkte von je drei homologen Ebenen der Büschel auf einer Raumcurve dritter Ordnung, von welcher die Axen u, u_1, u_2 drei Sehnen sind (Seite 92). Welche Ausnahme tritt ein, wenn die Axe u mit der Richtung der Axe u_1 (oder u_2) einen rechten Winkel bildet?

41. Es giebt höchstens zwei Punkte, aus welchen drei beliebige Gerade u, u_1, u_2 durch drei zu einander rechtwinklige Ebenen projicirt werden.

42. Ein gerades Gebilde u und ein Ebenenbüschel u_1 sind projectivisch auf einander bezogen, und ihre Träger sind nicht zu einander rechtwinklig. Fällt man dann aus jedem Punkte von u eine Senkrechte auf die entsprechende Ebene von u_1, so liegen die Fusspunkte aller dieser Senkrechten auf einer Raumcurve dritter Ordnung, von welcher die Geraden u und u_1 zwei Sehnen sind (Seite 92). Eine unendlich ferne, uneigentliche Sehne der Raumcurve lässt sich leicht angeben; die Curve ist daher eine räumliche Ellipse.

43. Wenn die beiden Schenkel eines veränderlichen Winkels an je zwei festen, aber sich nicht schneidenden Geraden hingleiten und zugleich

seine Ebene um eine feste Gerade sich dreht, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Raumcurve dritter Ordnung, von welcher die fünf gegebenen Geraden Sehnen sind (Seite 91).

sein Scheitelpunkt auf einer festen Geraden sich bewegt, so beschreibt seine Ebene einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, von welchem die fünf gegebenen Geraden Axen sind.

Nur darf die fünfte feste Gerade keine der vier ersten schneiden, und diese dürfen in keiner Regelschaar liegen.

44. Mittelst collinearer Strahlenbündel eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. zwei Punkte und vier Sehnen, oder b. drei Punkte und drei Sehnen, oder c. fünf Punkte und eine Sehne.

45. Als Schnitt von zwei Kegelflächen II. Ordnung eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. sechs Punkte, oder b. fünf Punkte und die Tangente von einem derselben, c. vier Punkte und die Tangenten von zwei derselben, d. drei Punkte und deren Tangenten, e. drei Punkte und die Tangenten und Schmiegungs-Ebenen von zwei derselben.

46. Als Erzeugniss von drei projectivischen Ebenenbüscheln I. Ordnung eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von welcher gegeben sind: a. drei Punkte und drei Sehnen, oder b.

drei Punkte, die Tangente und Schmiegungs-Ebene von einem derselben und zwei Sehnen.

47. Bei besonderer gegenseitiger Lage der gegebenen Stücke bieten die letzten drei Aufgaben (44 bis 46) Ausnahmen dar oder werden unbestimmt. Sind z. B. von einer Raumcurve dritter Ordnung zwei Punkte und vier Sehnen gegeben, so artet die Curve aus, wenn eine der vier Sehnen die drei übrigen oder auch die Verbindungslinie der beiden Punkte schneidet; die Curve wird entweder unmöglich oder unbestimmt, wenn durch einen der beiden gegebenen Punkte eine Gerade gelegt werden kann, welche drei von den vier Sehnen schneidet. Für jeden Fall der Aufgaben 44 bis 46 sind die Ausnahmen anzugeben.

48. Zu den Aufgaben 44 bis 46 sind die reciproken Aufgaben für Ebenenbüschel dritter Ordnung aufzustellen und zu lösen.

49. Eine Raumcurve dritter Ordnung wird aus jedem ausserhalb gelegenen Punkte P durch eine Kegelfläche dritter Ordnung projicirt, welche einen eigentlichen oder uneigentlichen „Doppelstrahl“ besitzt, nämlich die durch P gehende Sehne. Die Tangenten der Raumcurve bilden eine Fläche vierter Ordnung (Seite 115); folglich ist jene Kegelfläche von der vierten Classe. Jede durch P gehende Schmiegungs-Ebene der Raumcurve ist eine stationäre Berührungsebene der Kegelfläche dritter Ordnung. Es giebt deren mindestens eine und höchstens drei, und im letzteren Falle liegen die zugehörigen drei „Wendestrahlen“ der Kegelfläche dritter Ordnung in einer Ebene (Seite 101). Liegt der Punkt P auf einer Tangente der Raumcurve dritter Ordnung, so hat die Kegelfläche einen „Rückkehrstrahl“ in dieser Tangente.

50. Zwei einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung eingeschriebene Dreiecke werden aus einem beliebigen Punkte von k^3 durch zwei Dreikante projicirt, welche einer Kegelfläche II. Ordnung eingeschrieben und folglich (vgl. I. Abth. Seite 122) einer anderen Kegelfläche II. Ordnung umschrieben sind. Daraus folgt: Eine cubische Raumcurve und ein ihr eingeschriebenes Tetraeder werden von einer beliebigen Ebene in einem Dreieck und einem Vierseit geschnitten, welche einer Curve II. Ordnung umschrieben sind.

51. Ist einer cubischen Raumcurve ein einfaches Siebeneck 1234567 eingeschrieben, so schneiden dessen Kanten die ihnen gegenüberliegenden Flächen in den Eckpunkten eines anderen einfachen Siebenecks, welches dem ersteren um- und zugleich eingeschrieben ist. Z. B. die Kanten 23, 34, 45 schneiden die resp.

Flächen *567*, *671*, *712* in drei Punkten, welche mit dem Punkte 7 in einer Ebene liegen, wie sich sofort ergiebt, wenn man aus 7 das Sechseck *123456* durch ein (Pascal'sches) Sechskant projicirt.

52. Die Hauptaxe des durch eine Raumcurve dritter Ordnung bestimmten Nullsystems möge „Hauptaxe dieser Raumcurve" heissen. Wird die Raumcurve in der Richtung ihrer Hauptaxe verschoben oder um die Hauptaxe gedreht, so ändert sich das durch sie bestimmte Nullsystem nicht. Das aus einem beliebigen Punkte P der Raumcurve auf die Hauptaxe gefällte Perpendikel liegt in der Schmiegungs-Ebene von P. Ist a der Abstand der Hauptaxe von einer beliebigen Tangente der Raumcurve und α der Winkel, welchen sie mit der Tangente bildet, so ist das Product $a \,.\, \tang \alpha$ constant.

53. Zwei cubische Raumcurven k^3 und k_1^3, welche fünf Punkte mit einander gemein haben, können allemal durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden. Zieht man nämlich an k^3 aus irgend zwei Punkten von k_1^3 zwei Sehnen und verbindet diese mit k^3 durch eine Fläche zweiter Ordnung, so geht letztere auch durch k_1^3, weil sie mit k_1^3 sieben Punkte gemein hat (Seite 151). Ist die Fläche eine Regelfläche, so besteht ihre eine Regelschaar aus Sehnen von k^3 und die andere aus Sehnen von k_1^3.

54. Einem räumlichen Fünfeck können doppelt unendlich viele Raumcurven dritter Ordnung umschrieben werden. Durch einen beliebig angenommenen Punkt geht eine derselben, und eine beliebige Gerade des Raumes ist Sehne von einer dieser Raumcurven. *Von einer durch keinen Eckpunkt des Fünfecks gehenden Ebene Σ werden diese cubischen Raumcurven in Poldreiecken eines ebenen Polarsystems geschnitten.* Nämlich jede Gerade a von Σ ist Sehne von einer jener Raumcurven k^3 und kann demjenigen Punkte A von Σ zugeordnet werden, in welchem k^3 von Σ ausserhalb a geschnitten wird; und jeder Punkt B von Σ liegt auf einer jener Curven k_1^3, und kann der in Σ liegenden, nicht durch B gehenden Sehne b von k_1^3 zugeordnet werden. Wenn aber a sich um B dreht, so muss A die Gerade b beschreiben, wie der Satz behauptet; denn k^3 und k_1^3 können durch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung verbunden werden (Nr. 53), welche durch a und b geht und auch den Punkt A enthält. — Wenn A auf einer Kante des Fünfecks liegt, so zerfällt k^3 in diese Kante und einen in der gegenüberliegenden Fläche liegenden Kegelschnitt. Daraus ergiebt sich die folgende Eigenschaft von acht Punkten einer Raumcurve dritter Ordnung:

55. Eine cubische Raumcurve und die zehn Paare gegenüberliegender Elemente (Kanten und Flächen) eines ihr eingeschriebenen räumlichen Fünfecks werden von einer durch keinen Eckpunkt des letzteren gehenden Ebene in einem Poldreieck und zehn Paar zugeordneten Elementen eines ebenen Polarsystems geschnitten (vgl. Seite 68).

56. Zu einer anderen Eigenschaft von acht Punkten einer cubischen Raumcurve gelangen wir mit Hülfe der Sätze über die acht Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung (Seite 151). Sind von diesen Schnittpunkten sechs auf einer cubischen Raumcurve k^3 beliebig angenommen, so ist durch den siebenten der achte völlig bestimmt; und zwar liegt er mit dem siebenten auf einer Sehne s von k^3. Da s mit k^3 durch einen F^2-Büschel verbunden werden kann, so wird s von einer beliebig durch die sechs Punkte gelegten Fläche zweiter Ordnung in einem Punktenpaare geschnitten, welches mit den sechs ersteren die acht Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung bildet. Alle diese Punktenpaare aber gehören zu der involutorischen Punktreihe, in welcher irgend ein durch die sechs Punkte gehender F^2-Büschel von s geschnitten wird (Seite 159). Daraus ergiebt sich u. A.: *Die zehn Paar Gegenebenen eines der cubischen Raumcurve* k^3 *eingeschriebenen Sechsecks werden von einer beliebigen Sehne der* k^3 *in zehn Punktenpaaren einer involutorischen Punktreihe geschnitten, in welchem auch die beiden Schnittpunkte von* k^3 *und der Sehne einander zugeordnet sind.* Dieser Satz erinnert an denjenigen des Desargues (I. Abth. Seite 126).

57. Wenn zwei reciproke Systeme in derselben Ebene, aber nicht involutorisch liegen, so entsprechen jedem Punkte P der Ebene zwei Gerade, deren Schnittpunkt P_1 dem Punkte P zugeordnet werden möge. Beschreibt P eine Gerade, so beschreibt der zugeordnete Punkt P_1 im Allgemeinen eine Curve II. Ordnung. Zwischen den Punktsystemen P und P_1 besteht eine geometrische Verwandtschaft zweiten Gerades und sie liegen involutorisch. Man beweise, dass die sämmtlichen Verbindungslinien $\overline{PP_1}$ von je zwei einander zugeordneten Punkten in einem Hauptpunkte sich schneiden und sich selbst zugeordnet sind.

58. Soll zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Gerades aufgestellt werden, so können nicht nur irgend zwei eigentliche Dreiecke derselben als Hauptdreiecke einander zugeordnet werden (d. h. die resp. Eckpunkte derselben als Hauptpunkte), sondern es kann noch zu

irgend einem Punkte A von Σ der entsprechende A_1 von Σ_1 willkürlich gewählt werden. Dadurch ist aber jedem Punkte P von Σ der entsprechende Punkt P_1 von Σ_1 zugewiesen (Seite 123 und 124).

59. Umschreibt man einem Dreiecke die sämmtlichen Kegelschnitte, welche entweder eine gegebene Gerade berühren oder eine Curve II. Ordnung, die durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht, oder eine Curve dritter Ordnung, welche durch zwei Punkte des Dreiecks geht und den dritten zum Doppelpunkt hat, oder endlich eine Curve vierter Ordnung, welche jeden Eckpunkt des Dreiecks zum Doppelpunkt hat: so werden je zwei dieser Kegelschnitte von den übrigen projectivisch geschnitten. Wird nämlich die Ebene der Kegelschnitte auf ein anderes ebenes System geometrisch bezogen, so dass die drei Hauptpunkte der Ebene mit den Eckpunkten des Dreiecks zusammenfallen, so entsprechen jenen Kegelschnitten die sämmtlichen Tangenten einer Curve II. Ordnung.

60. Wenn von fünf, einem Dreiecke UVW umschriebenen Kegelschnitten vier gegeben sind, und der fünfte der Bedingung genügen soll, dass die vier ersten ihn in noch vier harmonischen Punkten schneiden, so umhüllt er im Allgemeinen eine gewisse Curve vierter Ordnung, welche auch die vier ersten Kegelschnitte berührt und die Eckpunkte des Dreiecks UVW zu Doppelpunkten hat (Nr. 59).

61. Besteht zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades, so können diejenigen Geraden von Σ, welchen in Σ_1 eine Ellipse entspricht, leicht von den übrigen unterschieden werden, welchen eine Parabel, oder eine Hyperbel entspricht. Man suche in Σ denjenigen Kegelschnitt σ, welcher der unendlich fernen Geraden s_1 von Σ_1 entspricht; einer beliebigen Geraden g von Σ entspricht alsdann in Σ_1 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem g mit σ keinen reellen Punkt, einen Punkt oder zwei Punkte gemein hat.

62. Jeder Curve II. Ordnung, welche dem Hauptdreieck eines ebenen Systems Σ eingeschrieben ist, entspricht in dem quadratisch verwandten Systeme Σ_1 eine Curve vierter Ordnung, welche die drei Hauptpunkte von Σ_1 zu Rückkehrpunkten (oder Spitzen) hat. *Die Tangenten an diesen drei Rückkehrpunkten schneiden sich in einem Punkte;* denn welche drei Geraden entsprechen ihnen in Σ?

63. Wenn eine ebene Curve $n$ter Ordnung mit einem Kegelschnitt im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte gemein hat, so

lässt sich hieraus mit Leichtigkeit der Satz beweisen: *Jeder Curve* n *ter Ordnung eines ebenen Systems* Σ *entspricht in einem quadratisch verwandten Systeme* Σ_1 *eine Curve* $2n$ *ter Ordnung.* Geht jedoch die erste Curve ein oder mehrmals durch einen Hauptpunkt von Σ, so enthält die zweite ebenso oft die entsprechende Hauptlinie von Σ_1, und zerfällt demnach in diese Hauptlinie und eine Curve niedrigerer Ordnung.

64. Wenn zwei quadratisch verwandte Ebenen die sämmtlichen Punkte ihrer Schnittlinie entsprechend gemein haben, so liegen auf der letzteren zwei einander zugeordnete Hauptpunkte der Ebenen (Seite 124). Die Verbindungslinien entsprechender Punkte werden alsdann von denjenigen beiden Geraden geschnitten, welche die übrigen beiden Paare zugeordneter Hauptpunkte mit einander verbinden. Diesen besonderen Fall der geometrischen Verwandtschaft hat Steiner (System. Entwickelung etc. Seite 251 bis 295) mit gewohnter Meisterschaft eingehend untersucht.

Büschel, Bündel und Gebüsch linearer Strahlencomplexe. Projectivische Erzeugung quadratischer Strahlencomplexe.

65. Zwei Elemente heissen „einander zugeordnet bezüglich eines linearen Strahlencomplexes", wenn sie in dem Nullsystem, aus dessen Leitstrahlen der Complex besteht, einander zugeordnet sind. Jedem Punkte ist bezüglich des Complexes seine durch ihn gehende Nullebene, und jeder Ebene ihr Nullpunkt zugeordnet. Eine Gerade ist sich selbst oder einer anderen Geraden zugeordnet, jenachdem sie dem linearen Complexe angehört oder nicht.

66. Ein „Complexbüschel" besteht aus allen linearen Strahlencomplexen, welche durch ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe gehen; dieses Strahlensystem heisst der „Träger" des Complexbüschels. Durch vier beliebige Strahlen, die nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung oder zweiter Classe liegen, geht ein bestimmter Complexbüschel; die vier Strahlen bestimmen den Träger desselben. Durch einen beliebigen Strahl, welcher nicht allen Complexen des Büschels angehört, geht allemal ein einziger derselben.

67. Ein Complexbüschel ist durch je zwei seiner linearen Complexe bestimmt. Die beiden Axen seines Trägers sind einander zugeordnet in Bezug auf jeden seiner Complexe; sie sind die Axen von zwei „singulären" Complexen des Büschels. Jeder dieser singulären Complexe besteht aus allen Geraden, welche eine der beiden Axen schneiden.

68. Einer Geraden g, die weder dem Träger des Complexbüschels angehört noch eine der Axen des Trägers schneidet, sind bezüglich der Complexe des Büschels die Strahlen einer Regelschaar R zugeordnet, welche durch g und die beiden Axen des Trägers geht. Denn alle Strahlen des Trägers, welche g schneiden, liegen in einer Regelschaar (Seite 78), und von dieser ist R die Leitschaar. Da ein linearer Strahlencomplex bestimmt ist durch einen seiner Strahlen und zwei einander zugeordnete Gerade, so ist jeder Strahl der Regelschaar R der Geraden g zugeordnet in Bezug auf einen der Complexe des Büschels. Bezüglich eines singulären Complexes ist jeder beliebigen Geraden g die Axe desselben zugeordnet.

69. Die Nullebenen von zwei beliebigen Punkten der Geraden g bilden zwei zu der Regelschaar R perspectivische und zu einander projectivische Ebenenbüschel I. Ordnung; und die Nullpunkte von zwei durch g gehenden Ebenen bezüglich der linearen Complexe bilden zwei projectivische und zu R perspectivische Punktreihen I. Ordnung. Daraus folgt der Satz:

70. Die Nullebenen beliebiger Punkte bezüglich aller Complexe eines Complexbüschels bilden Ebenenbüschel, und die Nullpunkte beliebiger Ebenen bilden Punktreihen erster Ordnung, welche durch den Complexbüschel projectivisch auf einander bezogen sind. Zu denselben sind auch die Regelschaaren projectivisch, welche (Nr. 68.) beliebigen Geraden in Bezug auf den Complexbüschel zugeordnet sind. — Von jedem Elementargebilde, welches zu einem jener Ebenenbüschel oder geraden Gebilde projectivisch ist, sagen wir, es sei auf den Complexbüschel projectivisch bezogen.

71. Uebrigens fallen die Nullebenen eines Punktes, welcher auf einer Axe des Trägers des Complexbüschels liegt, zusammen, und dasselbe gilt von den Nullpunkten einer Ebene, welche durch eine der beiden Axen des Trägers geht. Für die Punkte und Ebenen dieser beiden Axen erleidet also der vorhergehende Satz Ausnahmen. Wenn eine Gerade g eine dieser Axen schneidet, so sind ihr bezüglich der Complexe des Büschels die Strahlen eines gewöhnlichen Strahlenbüschels zugeordnet; derselbe ist zu dem Complexbüschel projectivisch, sein Mittelpunkt liegt auf der anderen Axe des Trägers in der Ebene, welche die erstere Axe mit g verbindet, und seine Ebene ist dem Schnittpunkte von g und dieser ersteren Axe zugeordnet.

72. Zwei projectivische Complexbüschel erzeugen einen Strahlencomplex zweiten Grades; derselbe enthält jeden Strahl,

welchen zwei homologe Complexe der Büschel mit einander gemein haben, und kann demnach durch ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe beschrieben werden. Alle durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen dieses quadratischen Strahlencomplexes bilden eine Kegelfläche (einen „Complexkegel“) zweiter Ordnung; dieselbe wird erzeugt durch die projectivischen Nullebenenbüschel, welche dem Punkte P in Bezug auf die beiden projectivischen Complexbüschel zugeordnet sind (Nr. 70.). Alle in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen des quadratischen Complexes bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; derselbe wird durch die beiden, der Ebene zugeordneten Nullpunktreihen erzeugt.

73. Der quadratische Strahlencomplex geht durch die Träger der beiden ihn erzeugenden Complexbüschel, weil jeder Strahl dieser Träger in zwei homologen Complexen der Büschel liegt. Man kann beweisen (vgl. Nr. 90), dass der quadratische Complex zwei Schaaren von Strahlensystemen erster Ordnung und erster Classe enthält, ähnlich wie eine Regelfläche zwei Schaaren von Geraden, und dass jede dieser Schaaren durch zwei projectivische Complexbüschel erzeugt werden kann, deren Träger zwei beliebige Strahlensysteme der anderen Schaar sind. Die Axe eines singulären Complexes des einen Büschels bildet mit der Geraden, welche ihr bezüglich des entsprechenden Complexes des andern Büschels zugeordnet ist, das Axenpaar des Strahlensystems, in welchem die beiden homologen Complexe sich durchdringen. Jede Axe eines Strahlensystems der einen Schaar ist somit auch Axe eines Strahlensystems der anderen Schaar. Alle Punkte einer solchen Axe sind „singuläre“ Punkte des quadratischen Strahlencomplexes, d. h. ihre Complexkegel zerfallen in je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung; und alle Ebenen der Axe sind singuläre Ebenen des quadratischen Complexes, indem die in ihnen liegenden Strahlen desselben je zwei gewöhnliche Strahlenbüschel bilden. Der Ort aller singulären Punkte und Ebenen des quadratischen Complexes ist demnach zugleich der Ort der Axen aller in dem Complexe enthaltenen Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe, also eine geradlinige Fläche. Weiter unten (Nr. 85) wird sich ergeben, dass diese Fläche von der vierten Ordnung und vierten Classe ist. Jeder auf ihr liegenden Axe sind zwei andere Axen zugeordnet; durch letztere gehen die Ebenen der beiden Strahlenbüschel, in welche der Complexkegel eines beliebigen Punktes

jener Axe zerfällt. — Der tetraedrale Complex ist ein Specialfall dieses quadratischen Complexes.

74. Drei lineare Strahlencomplexe, die in keinem Complexbüschel liegen, haben im Allgemeinen eine Regelschaar oder bei besonderer gegenseitiger Lage zwei gewöhnliche Strahlenbüschel mit einander gemein. Wenn sie nämlich irgend drei gemeinschaftliche Strahlen a, b, c haben, so gehen sie durch alle Strahlen der Regelschaar $a\,b\,c$, oder falls a und b sich schneiden, durch alle Strahlen des Büschels $a\,b$ und desjenigen zweiten Strahlenbüschels I. Ordnung, welcher einen Strahl des ersteren mit c verbindet (Seite 78). Die drei Complexe haben nur dann zwei Strahlenbüschel mit einander gemein, wenn die Axen der beiden Strahlensysteme, in welchen irgend einer von ihnen die beiden anderen durchdringt, sich paarweise schneiden. Hat überhaupt eines dieser Strahlensysteme reelle Axen u, v, so gehen die Complexe durch alle Strahlen, welche u und v schneiden und dem dritten Complexe angehören; woraus wieder der Satz folgt. Nur dann, wenn jene Axen imaginär sind, ist es möglich, dass die drei Complexe keinen reellen Strahl mit einander gemein haben.

75. Wenn drei beliebige lineare Strahlencomplexe einen reellen Strahl l mit einander gemein haben, so haben sie unendlich viele Strahlen mit einander gemein. Zum Beweise legen wir durch l zwei Ebenen α und β, und beziehen die beiden Strahlensysteme, in welchen der erste der drei Complexe die beiden übrigen durchdringt, perspectivisch auf α. Diese zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe sind dann auch perspectivisch auf den Strahlenbündel A bezogen, welcher dem ebenen Systeme α bezüglich jenes ersten Strahlencomplexes zugeordnet ist und den Strahl l enthält. Sie werden von β in zwei zu α und zu einander collinearen ebenen Systemen geschnitten (Seite 78), welche einen Strahlenbüschel A und folglich noch eine Punktreihe a entsprechend gemein haben; und jeder die Gerade a schneidende Strahl des einen Strahlensystems liegt auch in dem anderen, und ist ein gemeinschaftlicher Strahl der drei Complexe.

76. Ein linearer Strahlencomplex hat mit einem Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe entweder keinen reellen Strahl oder eine Regelschaar oder zwei gewöhnliche Strahlenbüschel gemein, falls er nicht durch alle Strahlen des Systems geht. Vier lineare Strahlencomplexe, oder zwei Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe, oder ein linearer Complex und

eine Regelschaar haben im Allgemeinen höchstens zwei Strahlen mit einander gemein (Nr. 74).

77. Drei lineare Strahlencomplexe, die nicht in einem Complexbüschel liegen, bestimmen einen durch sie gehenden „Complexbündel“. Zu demselben gehört der Complexbüschel, welcher irgend zwei von den drei Complexen verbindet, sowie jeder lineare Complex, der mit einem Complexe dieses Büschels und dem dritten gegebenen Complexe in einem Complexbüschel liegt. Ausserdem rechnen wir zu dem Complexbündel alle Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe, in welchen je zwei Complexe des Bündels sich durchdringen. Der „Träger“ des Complexbündels ist im Allgemeinen eine reelle oder imaginäre Regelschaar, durch welche alle Complexe und Strahlensysteme des Bündels gehen; in besonderen Fällen besteht er aus zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung. Die Leitstrahlen des Trägers sind die Axen der singulären Complexe des Bündels.

78. Einer Geraden g, die weder dem Träger des Complexbündels angehört noch ein Leitstrahl dieses Trägers ist, sind bezüglich der Complexe des Bündels die Strahlen eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe zugeordnet; dasselbe geht durch g und die drei Geraden, welche der Geraden g bezüglich der drei zuerst angenommenen Complexe zugeordnet sind (Nr. 68), und ist durch diese vier Geraden oder durch beliebige vier andere von seinen Strahlen bestimmt (Seite 80). Die Nullpunkte von zwei beliebig durch g gelegten Ebenen bezüglich aller Complexe des Bündels bilden zwei zu dem Strahlensysteme perspectivische und folglich zu einander collineare ebene Systeme; ebenso bilden die Nullebenen beliebiger Punkte von g collineare Strahlenbündel, welche zu dem Strahlensysteme perspectivisch sind. Daraus folgt der Satz:

79. Die Nullpunkte beliebiger Ebenen bezüglich aller Complexe eines Complexbündels bilden ebene Systeme, und die Nullebenen beliebiger Punkte bilden Strahlenbündel, welche durch den Complexbündel projectivisch, d. h. collinear oder reciprok auf einander bezogen sind. Zu denselben sind auch die Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe projectivisch, welche beliebigen Geraden in Bezug auf den Complexbündel zugeordnet sind. — Von jedem Gebilde zweiter Stufe, welches zu einem jener ebenen Systeme oder Strahlenbündel projectivisch ist, wollen wir sagen, es sei zu dem Complexbündel projectivisch.

80. Das von den Nullpunkten einer beliebigen Ebene gebildete ebene System ist auf den Complexbündel projectivisch so

bezogen, dass jedem Punkte desselben ein Complex des Bündels entspricht, jeder Punktreihe erster Ordnung ein Complexbüschel, und jeder Geraden als Träger einer Punktreihe ein Strahlensystem des Bündels als Träger des entsprechenden Complexbüschels. Eine beliebige Gerade der Ebene liegt allemal in dem ihr entsprechenden Strahlensysteme des Complexbündels, und zwei beliebige Ebenen werden gerade so wie vorhin collinear auf einander bezogen, wenn je zwei Strahlen, die sie mit einem Strahlensysteme des Complexbündels gemein haben, einander zugewiesen werden.

81. Der Complexbündel enthält (Nr. 80) alle Complexbüschel, welche durch je zwei seiner Complexe gehen; er ist durch beliebige drei seiner Complexe, die in keinem Büschel liegen, ebenso bestimmt, wie durch die zuerst angenommenen drei Complexe; zwei seiner Complexbüschel haben allemal einen Complex mit einander gemein, und zwei seiner Strahlensysteme können allemal durch einen linearen Complex verbunden werden. Durch jeden Strahl des Raumes geht ein Strahlensystem des Complexbündels; durch zwei beliebige Strahlen geht ein Complex des Bündels, und zwar ist derselbe durch die beiden Strahlen im Allgemeinen völlig bestimmt.

82. Die Punkte resp. Ebenen, welche beliebigen Punkten oder Ebenen bezüglich der in einem Complexbündel enthaltenen Strahlensysteme conjugirt sind, bilden collineare ebene Systeme resp. Strahlenbündel. Den Beweis dieses Satzes unterdrücken wir der Kürze wegen.

83. Zwei Complexbündel heissen reciprok, wenn bezüglich derselben einer und folglich (Nr. 79) jeder beliebigen Ebene zwei reciproke Systeme von Nullpunkten zugeordnet sind, also auch jedem Punkte zwei reciproke Bündel von Nullebenen. Jedem Complexe des einen Complexbündels entspricht dann ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe des andern; jedem Complexbüschel, welcher durch ein Strahlensystem des einen Bündels geht, entspricht ein Büschel von Strahlensystemen, welcher in dem zugehörigen Complexe des andern liegt.

84. Zwei reciproke Complexbündel erzeugen einen Strahlencomplex zweiten Grades.*) Dieser quadratische Complex geht durch jeden Strahl, welchen irgend ein Complex des einen Bündels mit dem entsprechenden Strahlensystem des andern gemein hat;

*) Dass jeder quadratische Strahlencomplex auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke Complexbündel erzeugt werden kann, hat zuerst Herr Frdr. Schur in seiner Inaugural-Dissertation („Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades“, Berlin 1879) bewiesen.

er geht folglich auch durch die Träger der reciproken Complexbündel und kann durch eine Regelschaar beschrieben werden. Alle in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen des quadratischen Complexes bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung (Seite 61), und alle durch einen beliebigen Punkt gehenden Strahlen desselben bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung, den „Complexkegel“ des Punktes. Singuläre Punkte und Ebenen des quadratischen Strahlencomplexes sind solche, deren Complexkegel resp. Complexstrahlenbüschel in zwei gewöhnliche Strahlenbüschel zerfallen.

85. Durch eine beliebige Gerade g gehen im Allgemeinen höchstens vier singuläre Ebenen, und auf ihr liegen im Allgemeinen höchstens vier singuläre Punkte des quadratischen Strahlencomplexes. Nämlich die Complexkegel von drei beliebigen Punkten der Geraden g schneiden sich im Allgemeinen in höchstens acht Punkten; die Ebenen aber, welche diese acht Punkte mit g verbinden, sind singuläre Ebenen des quadratischen Complexes, weil von den in ihnen liegenden Complexstrahlen je drei durch jene Punkte gehen, und sie fallen paarweise zusammen, weil in einer singulären Ebene zwei Büschel von Complexstrahlen liegen. Auf analoge Art beweist man den zweiten Theil des Satzes.

86. Vier lineare Strahlencomplexe, die nicht in einem Complexbündel liegen, bestimmen ein durch sie gehendes „Complexgebüsch“. Zu demselben gehört der Complexbündel, welcher irgend drei der vier Complexe verbindet, sowie jeder lineare Complex, welcher mit irgend zwei Complexen dieses Bündels und dem vierten gegebenen Complexe in einem Complexbündel liegt. Ausserdem rechnen wir zu dem Complexgebüsche alle Strahlensysteme und Regelschaaren, in welchen je zwei resp. drei Complexe des Gebüsches sich durchdringen. Wenn die vier ersten Complexe zwei Strahlen mit einander gemein haben, so besteht das Complexgebüsch aus allen durch diese beiden Strahlen gehenden linearen Strahlencomplexen, Regelschaaren und Strahlensystemen erster Ordnung und erster Classe. Die beiden Strahlen bilden den „Träger“ des Complexgebüsches; wenn sie sich schneiden, so ist das Gebüsch ein singuläres und hat den durch sie gehenden Strahlenbüschel I. Ordnung zum Träger.

87. Das Complexgebüsch enthält (Nr. 86) alle Complexbüschel, welche durch je zwei, und folglich auch alle Complexbündel, welche durch je drei seiner Complexe bestimmt sind; wie durch die vier zuerst angenommenen, so ist es durch je vier seiner

Complexe bestimmt, die in keinem Complexbündel liegen. Zwei resp. drei beliebige Complexbündel des Gebüsches haben allemal einen Complexbüschel resp. einen linearen Complex mit einander gemein; der letztere geht durch die Träger der drei Bündel. Drei beliebige Regelschaaren des Gebüsches können folglich durch einen linearen Complex desselben verbunden werden. Durch jeden Strahl des Raumes geht eine Regelschaar des Gebüsches; zwei beliebige Strahlen können durch ein Strahlensystem und drei Strahlen können durch einen Complex des Gebüsches verbunden werden, welcher durch die drei Strahlen im Allgemeinen völlig bestimmt ist.

88. Einer Geraden g, die mit dem Träger des Complexgebüsches keinen Punkt gemein hat, sind bezüglich der Complexe desselben die Strahlen eines linearen Complexes zugeordnet; derselbe geht durch g und ist bestimmt durch g und die vier Strahlen, welche der Geraden g in Bezug auf vier beliebige Complexe des Gebüsches zugeordnet sind (Seite 72; vgl. Nr. 78). Die beiden linearen Complexe, welche zwei verschiedenen Geraden hinsichtlich des Gebüsches zugeordnet sind, haben die Axen aller singulären Complexe des Gebüsches mit einander gemein (Nr. 68); diese Axen bilden demnach ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, und der Träger des Complexgebüsches besteht aus den beiden reellen oder imaginären Axen dieses Strahlensystems. Zugleich ergiebt sich: Vier lineare Strahlencomplexe haben im Allgemeinen zwei reelle oder conjugirt-imaginäre Strahlen mit einander gemein.

89. Das Complexgebüsch kann auf ein räumliches System Σ collinear bezogen werden, sodass jedem Complexe desselben eine Ebene von Σ entspricht, jedem Complexbüschel ein zu ihm projectivischer Ebenenbüschel erster Ordnung, jedem Complexbündel und dessen Träger ein Strahlenbündel und dessen Mittelpunkt. Und zwar kann man zu dem Behufe zwei beliebige Complexbündel des Gebüsches in der oben (Nr. 79) angegebenen Weise projectivisch auf zwei Strahlenbündel von Σ beziehen, sodass jedem gemeinschaftlichen Complexe der ersteren eine gemeinschaftliche Ebene der letzteren entspricht; die collineare Beziehung ist dadurch völlig festgelegt (vgl. Seite 21). — Auch der lineare Strahlencomplex, welcher in Bezug auf das Complexgebüsch einer beliebigen Geraden g zugeordnet ist, wird dadurch auf Σ projectivisch bezogen; und zwar entspricht jedem Strahle desselben eine Ebene von Σ, und umgekehrt, dem Strahle g jedoch entsprechen alle Ebenen eines Ebenenbüschels von Σ.

90. Jeder Ebene von Σ entspricht in dem Complexgebüsche ein linearer Complex, jeder Geraden von Σ ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, und einem beliebigen Punkte von Σ im Allgemeinen eine Regelschaar. Alle Regelschaaren des Gebüsches, welche den Punkten einer Fläche zweiter Ordnung von Σ entsprechen, liegen in einem quadratischen Strahlencomplex; wie die Fläche durch reciproke Strahlenbündel, so kann dieser quadratische Complex durch reciproke Complexbündel erzeugt werden. Die beiden Strahlen, welche die Complexe des Gebüsches mit einander gemein haben, sind Doppelstrahlen dieses quadratischen Complexes. Hieher gehört auch der durch zwei projectivische Complexbüschel erzeugte quadratische Complex (Nr. 72); denn zwei Complexbüschel können allemal durch ein Complexgebüsch verbunden werden. — Den singulären Complexen des Gebüsches entsprechen im räumlichen Systeme Σ die Berührungs-Ebenen einer Fläche zweiter Classe, weil in einem Complexbüschel im Allgemeinen höchstens zwei singuläre Complexe enthalten sind (Nr. 67).

Das F^2-Gebüsch. Flächen vierter Ordnung.

91. Ich entlehne der analytischen Geometrie den folgenden Satz, von welchem mir ein einfacher synthetischer Beweis nicht bekannt ist: „Wenn eine Curve vierter Ordnung mit einem Kegelschnitt mehr als acht Punkte gemein hat, so zerfällt sie in diesen und einen zweiten Kegelschnitt.“ Das F^2-Gebüsch Σ, von welchem in den folgenden Nummern die Rede ist, denke ich mir in der früher (Seite 235) angegebenen Weise projectivisch auf ein räumliches System Σ_1 bezogen.

92. *Einem Kegelschnitt des F^2-Gebüsches Σ entspricht in dem räumlichen Systeme Σ_1 entweder eine ebene Curve vierter Ordnung* (Seite 242), *oder eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species* (vgl. Seite 228). Nämlich diese Curve hat mit einer beliebigen Ebene von Σ_1 höchstens vier Punkte gemein, weil der Kegelschnitt die entsprechende Fläche des F^2-Gebüsches in höchstens vier Punkten schneidet. Legen wir im Falle der Raumcurve durch beliebige neun Punkte derselben eine Fläche L_1^2 zweiter Ordnung, so entspricht dieser in Σ eine Fläche L^4 vierter Ordnung; und weil letztere mit dem Kegelschnitt mehr als acht Punkte gemein hat, so wird sie von der Ebene desselben in diesem und in noch einem zweiten Kegelschnitt getroffen. Durch die Raumcurve vierter Ord-

nung geht folglich diese eine Fläche L_1^2 zweiter Ordnung; dieselbe schneidet die Steiner'sche Fläche von Σ_1, welche der Ebene der beiden Kegelschnitte entspricht, in noch einer zweiten Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species.

93. Einem Kegelschnitt des räumlichen Systems Σ_1 entspricht im F^2-Gebüsche Σ eine Raumcurve achter Ordnung, durch welche eine Fläche des Gebüsches geht. Denn jede Steiner'sche Fläche von Σ_1, welche einer Ebene von Σ entspricht, hat mit dem Kegelschnitt höchstens acht Punkte gemein, wenn derselbe nicht ganz auf ihr liegt (Nr. 91).

94. Einer Fläche vierter Ordnung von Σ_1 entspricht in dem F^2-Gebüsche Σ eine Fläche achter Ordnung; einer Fläche II. Ordnung von Σ entspricht in Σ_1 entweder eine Ebene oder eine Fläche achter Ordnung.

95. Den Punkten einer beliebigen Geraden des Gebüsches Σ sind (Nr. 93) die Punkte einer Raumcurve siebenter Ordnung associirt, welche mit der Geraden durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden kann. Ist jedoch die Gerade ein Hauptstrahl von Σ, so sind ihren Punkten diejenigen einer Raumcurve dritter Ordnung associirt, von welcher die Gerade eine Sehne ist.

96. Den Punkten einer beliebigen Ebene sind im F^2-Gebüsche Σ die Punkte einer Fläche siebenter Ordnung associirt (Nr. 94). Die Fläche geht durch alle Hauptstrahlen der Ebene, deren es nach Seite 241 mindestens einen und höchstens drei giebt, und schneidet sich selbst in den Raumcurven dritter Ordnung, welche diesen Hauptstrahlen associirt sind. Sie enthält doppelt unendlich viele Raumcurven siebenter Ordnung (Nr. 95); dieselben liegen paarweise auf Flächen II. Ordnung, welche von der gegebenen Ebene in je zwei Geraden geschnitten werden. Die gegebene Ebene wird von der Kernfläche des Gebüsches in einer Curve vierter Ordnung geschnitten, welche auch auf der Fläche siebenter Ordnung liegt; denn jeder Punkt der Kernfläche fällt mit einem seiner associirten zusammen.

97. Alle Punkte einer Ebene, welche in einer zweiten gegebenen Ebene associirte Punkte besitzen, liegen auf einer Curve siebenter Ordnung (Nr. 95 oder 96).

98. Wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, die Flächen des F^2-Gebüsches Σ einen Punkt A mit einander gemein haben, so sind den Punkten einer durch A gehenden Geraden die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung associirt, von welcher die Gerade

eine Sehne ist; ebenso ist einer durch A gehenden Ebene φ eine Fläche fünfter Ordnung associirt, welche durch eine Raumcurve dritter Ordnung beschrieben werden kann. Diese Fläche fünfter Ordnung hat mit der Ebene φ deren nicht durch A gehenden Hauptstrahl u gemein, sowie deren Schnittlinie mit der Kernfläche K^4 des Gebüsches; sie geht zweimal durch diejenige Raumcurve dritter Ordnung, welche dem Hauptstrahle u associirt ist und auch den Punkt A enthält.

99. Einer Fläche L_1^2 zweiter Ordnung von Σ_1 entspricht im Flächengebüsch Σ eine Fläche L^4 vierter Ordnung, von welcher A ein Knotenpunkt ist. In diesem Knotenpunkt A hat die Fläche L^4 unendlich viele Berührungs-Ebenen; und zwar umhüllen dieselben eine Kegelfläche zweiter Ordnung, weil ihnen in der Ebene α_1 (nach Seite 245) die Tangenten des Kegelschnittes entsprechen, welchen α_1 mit L_1^2 gemein hat. Zerfällt dieser Kegelschnitt in zwei Gerade, so wird der Knotenpunkt ein sogenannter „biplanarer“ mit nur zwei Berührungs-Ebenen.

100. Im Folgenden werden wir häufig den Satz benutzen: „Wenn zwei Flächen II. Ordnung sich in einer Curve γ^2 II. Ordnung schneiden, so liegen alle übrigen gemeinschaftlichen Punkte derselben auf einem zweiten Kegelschnitt.“ Wenn nämlich ausserhalb γ^2 noch gemeinschaftliche Punkte existiren, so verbinden wir irgend drei derselben A, B, C durch eine Ebene. Dieselbe schneidet die Ebene von γ^2 in einer Geraden, welche entweder den Kegelschnitt γ^2 berührt, oder deren Punkte durch γ^2 und folglich durch jede der beiden Flächen II. Ordnung involutorisch gepaart sind. Im ersteren Falle ergiebt sich der Satz aus Seite 63, im letzteren aus Seite 150 der I. Abtheilung. Der zweite Kegelschnitt kann übrigens ebenso wie der erste γ^2 in zwei Gerade zerfallen, oder sich auf eine einzige Gerade reduciren.

101. Betrachten wir noch den besonderen Fall des F^2-Gebüsches Σ, in welchem alle Flächen desselben fünf und folglich alle Punkte eines Kegelschnittes γ^2 mit einander gemein haben. Einer beliebigen Geraden des räumlichen Systems Σ_1 entspricht alsdann, abgesehen vom Kegelschnitt γ^2, nur ein Kegelschnitt in Σ, und einem Punkte von Σ_1 entsprechen nur zwei associirte Punkte von Σ (Nr. 100). Ist ferner Y_1 der Punkt von Σ_1, welcher einem beliebigen, mit γ^2 in einer Ebene liegenden Punkte von Σ entspricht, so muss Y_1 allen Punkten der Ebene γ^2 entsprechen; denn jeder durch Y_1 gehenden Ebene von Σ_1 entspricht in Σ eine

Fläche II. Ordnung, welche in die Ebene γ_1^2 und eine zweite Ebene zerfällt. Jeder durch Y_1 gehenden Geraden s_1 entspricht folglich, abgesehen von der Ebene γ_1^2, nur ein Hauptstrahl s von Σ, dessen Punkte paarweise associirt und dadurch involutorisch gepaart sind, und je zwei dieser Hauptstrahlen liegen in einer Ebene, welcher eine durch Y_1 gehende Ebene entspricht.

102. Die sämmtlichen Hauptstrahlen s des Gebüsches Σ, welche den Strahlen des Punktes Y_1 entsprechen, schneiden sich in einem und demselben Punkte Y. Denn dieselben schneiden sich paarweise, ohne jedoch alle in einer Ebene zu liegen. Die einander entsprechenden Strahlenbündel Y und Y_1 sind collinear auf einander bezogen, und der Punkt Y entspricht dem Punkte Y_1, ist also jedem Punkte der Ebene γ_1^2 associirt.

103. Durch den Punkt Y geht die Ebene jedes Kegelschnittes γ^2, welcher einer beliebigen Geraden g_1 des räumlichen Systems Σ_1 entspricht. Daraus folgt: „Wenn vier Flächen II. Ordnung einen Kegelschnitt γ_1^2 mit einander gemein haben, so gehen die Ebenen der übrigen sechs Kegelschnitte, in denen sie ausserdem paarweise sich schneiden, durch einen und denselben Punkt Y." Einem Punkte P_1 von g_1 entspricht in γ^2 ein Paar associirter Punkte oder ein sich selbt associirter Punkt oder gar kein reeller Punkt, je nachdem der Hauptstrahl von Y, welcher dem Strahle $\overline{Y_1 P_1}$ entspricht, den Kegelschnitt γ^2 in zwei Punkten schneidet, in einem Punkte berührt oder gar nicht trifft. Die sämmtlichen Punkte von Σ_1, welchen im Gebüsche Σ je ein sich selbst associirter Punkt entspricht, liegen auf einer Fläche K_1^2 zweiter Ordnung; denn jede Gerade g_1 enthält höchstens zwei solche Punkte, weil an den entsprechenden Kegelschnitt γ^2 aus dem Punkte Y höchstens zwei Tangenten gezogen werden können.

104. Jede Gerade x, welche dem Kegelschnitt γ_1^2 in einem Punkte X begegnet, ist (Seite 244) ebenfalls ein Hauptstrahl des Gebüsches Σ; doch sind ihre Punkte nicht durch Association involutorisch gepaart, sondern die Gerade x ist auf die entsprechende Gerade x_1 von Σ_1 projectivisch bezogen, und ihren Punkten sind diejenigen eines anderen Hauptstrahles z associirt. Die Gerade z begegnet ebenfalls dem Kegelschnitt γ_1^2 in einem Punkte; sie bildet mit x zusammen den Kegelschnitt, welcher der Geraden x_1 von Σ_1 entspricht, liegt also mit x in einer durch Y gehenden Ebene und schneidet x in einem sich selbst associirten Punkte. Geht die Gerade x auch durch den Punkt Y, so fällt z mit ihr

zusammen; alsdann ist der Punkt X jedem anderen Punkte von x associirt, und jedem Punkte von x_1 entspricht der Punkt X und noch ein einziger anderer Punkt des Hauptstrahles x. Der letzte Satz von Nr. 101 erleidet demnach folgende Ausnahme:

105. In jedem Hauptstrahle s von Σ, welcher den Punkt Y mit einem Punkte X des Kegelschnittes γ^2 verbindet, sind dem Punkte X alle übrigen Punkte associirt; die Gerade s ist projectivisch zu der entsprechenden Geraden s_1 von Σ_1, aber alle Punkte der letzteren entsprechen zugleich dem Punkte X. — Wir wollen fortan mit H^2 die Kegelfläche II. Ordnung bezeichnen, durch welche der Kegelschnitt γ^2 aus dem Punkte Y projicirt wird, und mit H_1^2 die entsprechende Kegelfläche des Bündels Y_1.

106. Die Kegelschnitte von Σ_1, welche (Seite 239) den Geraden von Σ entsprechen, haben den Punkt Y_1 mit einander gemein. Einer nicht durch Y gehenden Ebene φ von Σ entspricht (Seite 249) in Σ_1 eine durch Y_1 gehende Regel-, Kegel- oder nicht geradlinige Fläche F_1^2 zweiter Ordnung, jenachdem die Ebene φ mit dem Kegelschnitt γ^2 zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemein hat. Jedem Punkte von F_1^2 entspricht in φ ein einziger Punkt, und nur dem Punkte Y_1 eine Gerade; jedem Kegelschnitt von F_1^2 entspricht in φ ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt, wenn er nicht durch Y_1 geht, sonst eine Gerade.

107. Alle Punkte einer Ebene φ, welche in einer anderen Ebene ψ associirte Punkte besitzen, liegen im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt. Den Ebenen φ und ψ von Σ entsprechen nämlich im räumlichen Systeme Σ_1 zwei Flächen II. Ordnung; dieselben haben eine durch Y_1 gehende Curve II. Ordnung gemein, welche der Geraden $\overline{\varphi\psi}$ entspricht, und folglich im Allgemeinen noch einen zweiten Kegelschnitt k_1^2 (Nr. 100). Dem Kegelschnitt k_1^2 entsprechen in φ und ψ zwei einander associirte Kegelschnitte; dieselben liegen auf derjenigen Fläche II. Ordnung von Σ, welche der Ebene von k_1^2 entspricht.

108. Einer nicht durch Y gehenden Ebene φ ist (Nr. 107) im Gebüsche Σ eine Fläche II. Ordnung associirt, welche durch Y und den Kegelschnitt γ^2 geht. Alle sich selbst associirten Punkte von φ liegen folglich auf einem Kegelschnitt, und alle sich selbst associirten Punkte des Gebüsches Σ müssen auf einer Fläche K^2 zweiter Ordnung liegen, welche im Kegelschnitt γ^2 von der Kegelfläche H^2 berührt wird. Die Fläche K^2 ist die Kernfläche des Gebüsches und auf ihr liegen die Mittelpunkte aller im

Gebüsch enthaltenen Kegelflächen II. Ordnung. Dieser Kernfläche entspricht in Σ_1 wiederum eine Fläche K_1^2 zweiter Ordnung (Nr. 103). Je zwei associirte Punkte liegen mit Y auf einer Geraden, und sind, wenn letztere die Fläche K^2 schneidet, durch K^2 harmonisch getrennt. Offenbar sind wir hier zu derselben involutorischen Beziehung zwischen den Punkten des unendlichen Raumes gelangt, welche schon in Nr. 21 aufgestellt wurde.

109. Einer beliebigen Geraden ist (Nr. 108) im Gebüsche Σ ein durch Y gehender Kegelschnitt associirt, einem beliebigen Kegelschnitt k^2 aber eine ebene oder eine Raumcurve k^4 vierter Ordnung, jenachdem k^2 mit Y in einer Ebene liegt oder nicht. Der Punkt Y ist ein Doppelpunkt von k^4 und den beiden Schnittpunkten von k^2 und der Ebene γ_1^2 associirt. Ist k^4 eine Raumcurve vierter Ordnung, so schneiden sich in ihr die Kegelfläche Yk^2 und die Fläche II. Ordnung, welche der Ebene von k^2 associirt ist; sie ist also von der ersten Species.

110. Wenn ein Kegelschnitt k^2 mit der Curve γ_1^2 in einer Fläche II. Ordnung liegt, so ist ihm nicht eine Curve vierter Ordnung, sondern ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt associirt. Nämlich der Ebene von Σ_1, welche von irgend drei Punkten A, B, C von k^2 die entsprechenden enthält, entspricht im Gebüsche Σ eine Fläche II. Ordnung, welche durch γ_1^2 und A, B, C, also auch durch k^2 geht (Nr. 100). Und diese Fläche II. Ordnung wird von der Kegelfläche Yk^2 zum zweiten Male in dem zu k^2 associirten Kegelschnitt getroffen. Für den Fall, dass die Ebene von k^2 durch den Punkt Y geht, ergiebt sich der Satz aus dem folgenden:

111. Einer beliebig durch den Kegelschnitt γ_1^2 gelegten Fläche II. Ordnung ist eine andere, durch γ_1^2 gehende Fläche II. Ordnung associirt (Nr. 110), und ausserdem die Kegelfläche $Y\gamma_1^2$ oder H^2.

112. Einer ganz beliebigen Fläche F^2 zweiter Ordnung ist (Nr. 109) eine Fläche F^4 vierter Ordnung associirt, von welcher Y ein Knotenpunkt ist. Die Tangenten von F^4 im Punkte Y bilden eine Kegelfläche II. Ordnung, von welcher F^4 noch in einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species geschnitten wird; diese Kegelfläche geht durch den Kegelschnitt, welchen F^2 mit der Ebene γ_1^2 gemein hat. Alle übrigen Tangenten, welche noch aus dem Knotenpunkte Y an die Fläche F^4 gezogen werden können, berühren F^4 in den Punkten einer Raumcurve vierter Ordnung und bilden eine zweite Kegelfläche II. Ordnung, welche auch die Fläche F^2 berührt. Der Kegelschnitt γ_1^2 ist eine Doppelpunkts-

curve von F^4, weil F^2 von jedem Strahle der Kegelfläche H^2 im Allgemeinen zweimal geschnitten wird (vergl. Nr. 105). Einem beliebigen Kegelschnitt von F^2 entspricht im Allgemeinen auf F^4 eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species; diese Raumcurven liegen paarweise auf Kegelflächen II. Ordnung mit dem Mittelpunkte Y.

113. Die Fläche F^4 enthält im Allgemeinen vier durch Y gehende Gerade; dieselben verbinden Y mit den Schnittpunkten X von F^2 und η_1^2 (Nr. 105). Jede Ebene, welche durch zwei dieser Schnittpunkte X hindurchgeht, hat mit F^2 einen Kegelschnitt gemein, welchem in F^4 ein zu ihm projectivischer Kegelschnitt associirt ist (Nr. 110). Die Fläche F^4 enthält also im Allgemeinen sechs Schaaren von Kegelschnitten, oder kann auf sechsfache Art durch einen veränderlichen Kegelschnitt beschrieben werden; und zwar geht durch einen beliebigen Punkt von F^4 ein einziger Kegelschnitt von jeder Schaar. Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche F^4 in einer Curve vierter Ordnung, welche mit jeder von den Geraden $\overline{YX}$ einen Punkt gemein hat und im Allgemeinen auf dem Kegelschnitt η_1^2 zwei Doppelpunkte besitzt; ihr entspricht auf F^2 eine durch die vier Punkte X gehende Raumcurve vierter Ordnung (Nr. 108). Daraus folgt leicht: Die sechs Kegelschnittschaaren von F^4 sind paarweise einander zugeordnet, so dass jeder Kegelschnitt der einen Schaar mit einem Kegelschnitt der zugeordneten Schaar in einer Ebene ε liegt. Von den vier Schnittpunkten dieser beiden Kegelschnitte liegen zwei auf η_1^2; in den übrigen beiden wird F^4 von der Ebene ε berührt, weil F^2 von der zu ε associirten Fläche II. Ordnung ebenfalls in zwei Punkten berührt wird. Die Fläche F^4 besitzt also drei Schaaren doppelt berührender Ebenen, und hat mit jeder dieser Ebenen zwei Kegelschnitte gemein.

114. Aus der Abbildung von F^4 auf F^2 und aus Nr. 113 ergiebt sich sofort: Durch eine beliebige von den sechs Kegelschnittschaaren werden die Punkte jedes Kegelschnittes, welcher der zugeordneten Schaar angehört, involutorisch gepaart, die Kegelschnitte der übrigen vier Schaaren aber projectivisch auf einander bezogen. Aus dem ersten Theil dieses Satzes folgt, dass die sämmtlichen Ebenen jeder Schaar sich in einem und demselben Punkte U schneiden. Zwei einander zugeordnete Kegelschnitte, welche auf keiner dieser Ebenen U liegen, werden nun von letzteren projectivisch geschnitten, und zwar offenbar so, dass

sie zwei Punkte entsprechend gemein haben; dieselben erzeugen deshalb im Allgemeinen einen Strahlenbüschel II. Ordnung (I. Abth. Seite 114), und es folgt: Jede von den drei Schaaren doppelt berührender Ebenen bildet einen Ebenenbüschel U II. Ordnung; die Doppeltangenten von F^4, welche in diesen Ebenen liegen, bilden die von U eingehüllte Kegelfläche II. Ordnung. Wäre der letzte Theil des Satzes falsch, so würden durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten im Allgemeinen zwei Kegelschnitte von einer und derselben Schaar gehen, im Widerspruch mit Nr. 113. Weil zu den doppelt berührenden Ebenen von F^4 auch diejenigen sechs gehören, durch welche die vier Geraden $\overline{YX}$ paarweise verbunden werden, so enthält jeder der drei Ebenenbüschel U zwei von diesen sechs Ebenen, welche einander gegenüber liegen.

115. Ist F^2 eine Regelfläche, so enthält F^4 noch zwei weitere Schaaren von Kegelschnitten, die alle durch Y gehen und paarweise auf den, aus Y an F^2 gelegten Berührungs-Ebenen enthalten sind (Nr. 109). Ausser den vier Strahlen $\overline{YX}$ lassen sich dann noch vier Paar andere Gerade auf der Fläche F^4 angeben; dieselben entsprechen den vier Paar Strahlen der Regelfläche, welche durch die vier Punkte X gehen, und schneiden paarweise die Geraden $\overline{YX}$.

116. Wenn F^2 durch Y geht, so zerfällt F^4 in die Ebene η^2 und eine Fläche dritter Ordnung. — Von Interesse ist noch die Untersuchung der Fläche F_1^4 von Σ_1, welche einer Fläche F^2 II. Ordnung von Σ entspricht. Man findet, dass F_1^4 dieselben Eigenschaften hat, wie die eben betrachtete Fläche F^4. Von Nutzen ist bei dieser Untersuchung der Satz: Die Fläche F^2 enthält eine Raumcurve vierter Ordnung, deren Punkte paarweise associirt sind; nämlich F^2 wird von F^4 in dieser und noch in einer zweiten Raumcurve vierter Ordnung geschnitten, und zwar liegt die letztere auf der Kernfläche des Gebüsches (Nr. 108).

117. Einer beliebigen Fläche L_1^2 zweiter Ordnung von Σ_1 entspricht in Σ eine Fläche L^4 vierter Ordnung, an welche aus dem Punkte Y im Allgemeinen unendlich viele Doppeltangenten gelegt werden können. Diese Doppeltangenten bilden eine Kegelfläche II. Ordnung, und berühren die Fläche L^4 in den Punkten einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species; denn sie entsprechen den Tangenten, welche aus dem Punkte Y_1 an L_1^2 gelegt werden können. Aus Y lassen sich ausserdem unendlich viele einfache Tangenten an L^4 legen; die Berührungspunkte derselben liegen auf einer Raumcurve vierter Ordnung, in welcher L^4 von der Kernfläche

des Gebüsches geschnitten wird, und sind deshalb sich selbst associirt. Der Kegelschnitt γ_1^2 ist eine Doppelpunktscurve der Fläche L^4 (Nr. 105), weil L_1^2 von jedem Strahle der Kegelfläche H_1^2 im Allgemeinen zweimal geschnitten wird. Einem beliebigen Kegelschnitt von L_1^2 entspricht im Allgemeinen auf L^4 eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species; diese Raumcurven liegen paarweise auf Kegelflächen II. Ordnung mit dem Mittelpunkte Y. Ist L_1^2 eine Regelfläche, so enthält L^4 zwei Schaaren von Kegelschnitten, deren Ebenen durch Y gehen und die Fläche L^4 doppelt berühren. Geht L_1^2 durch Y_1, so zerfällt L^4 in die Ebene γ_1^2 und eine Fläche dritter Ordnung.

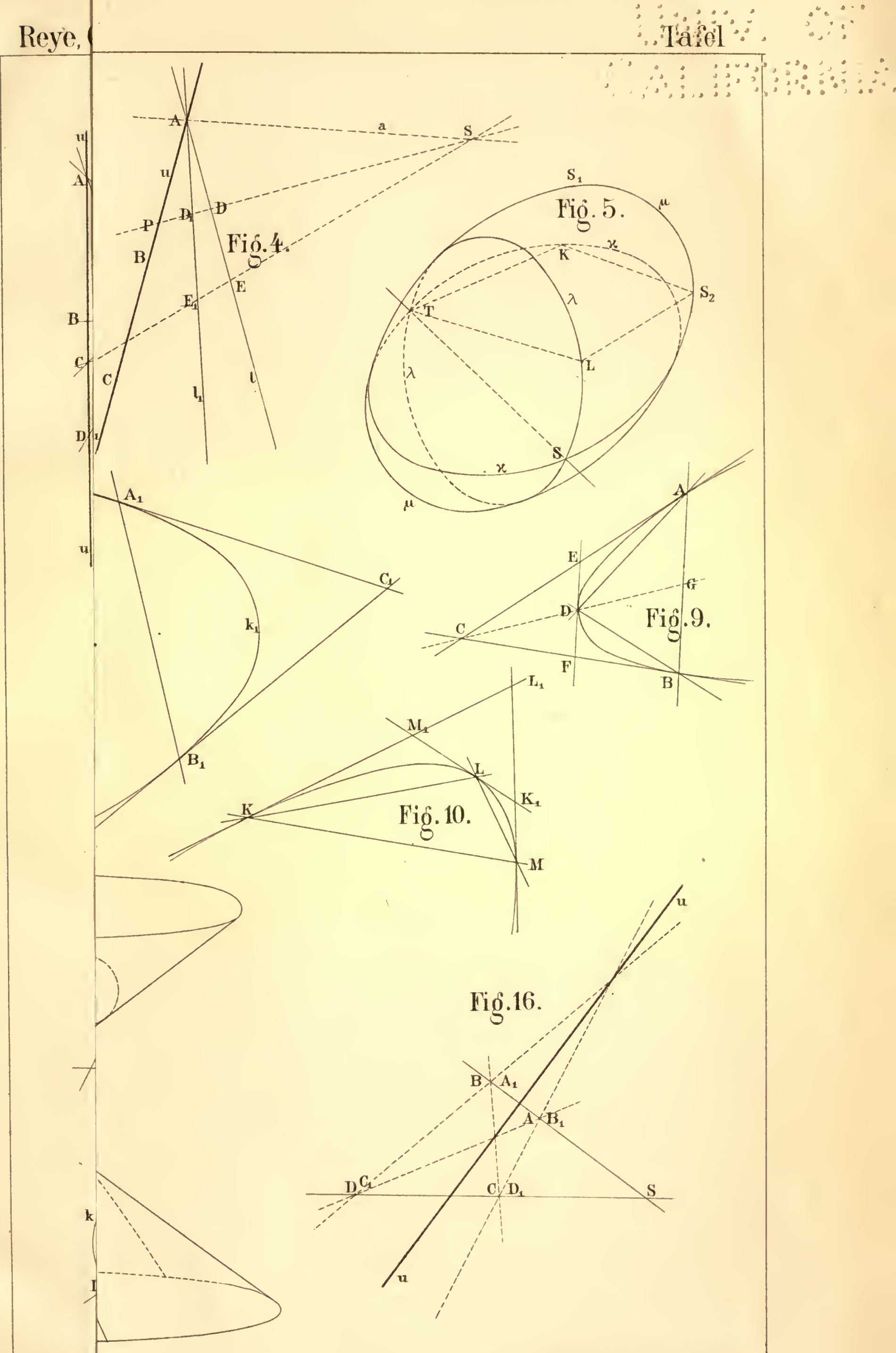
118. Es ist nicht meine Absicht, auch diese Fläche L^4 vierter Ordnung eingehender zu besprechen, von welcher die Fläche F^4 der Nr. 112 ein specieller Fall ist; ich begnüge mich mit einer Bemerkung über die Kegelschnitte, welche auf L^4 liegen können. Einem Kegelschnitt k^2 von Σ entspricht im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung in Σ_1, und nur dann ein Kegelschnitt k_1^2, wenn k^2 mit der Curve γ_1^2 durch eine Fläche II. Ordnung verbunden werden kann (Nr. 110). Im letzteren Fall giebt es noch einen zu k^2 associirten Kegelschnitt, welcher ebenfalls dem k_1^2 entspricht. Drei beliebige Punkte A, B, C von Σ können (Nr. 110) allemal durch einen einzigen Kegelschnitt verbunden werden, welchem in Σ_1 wiederum ein Kegelschnitt entspricht; drei Punkte von Σ_1 können im Allgemeinen durch vier Kegelschnitte verbunden werden, welchen in Σ Kegelschnittpaare entsprechen.

119. Von einer nicht durch Y gehenden Ebene φ wird L^4 nur dann in Kegelschnitten getroffen, wenn L_1^2 mit der der φ entsprechenden Fläche II. Ordnung von Σ_1 nicht eine Raumcurve vierter Ordnung, sondern zwei Kegelschnitte gemein hat, also von derselben doppelt berührt wird. Jede Ebene, welche mit L^4 Kegelschnitte gemein hat, ist folglich eine doppelt berührende Ebene der Fläche L^4. Die Kegelschnitte der Fläche L^4 sind paarweise einander oder in besonderen Fällen sich selbst associirt. — Gerade Linien enthält L^4 nur dann, wenn L_1^2 eine Regelfläche oder Kegelfläche II. Ordnung ist und einzelnen Strahlen derselben Hauptstrahlen des Gebüsches Σ entsprechen.

120. Der in den letzten 19 Nummern betrachtete Fall des F^2-Gebüsches Σ schliesst noch einen ganz besonderen Fall in sich. Nämlich die sämmtlichen Flächen des Gebüsches können noch ausser dem Kegelschnitt γ_1^2 einen Punkt mit einander gemein

haben. Derselbe übernimmt alsdann die Rolle des Punktes Y, denn durch ihn gehen alle Hauptstrahlen s des Gebüsches, welche den Kegelschnitt η^2 nicht treffen. Die Punkte eines solchen Hauptstrahles s sind jedoch nicht mehr durch Association involutorisch gepaart, sondern die Gerade s ist (Seite 244) auf die entsprechende Gerade s_1 von Σ_1 projectivisch bezogen. Gleichwie diese Hauptstrahlen s von Σ alle durch den Punkt Y gehen, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen s_1 von Σ_1 alle in dem Punkte Y_1. Letzterem entsprechen alle Punkte der Ebene η^2, und ebenso entsprechen dem Punkte Y die sämmtlichen Punkte einer Ebene η_1^2 von Σ_1 (Seite 245).

121. Die Räume Σ und Σ_1 sind demnach so auf einander bezogen, dass die collinearen Strahlenbündel Y und Y_1 einander entsprechen und je zwei homologe Gerade dieser Bündel projectivisch auf einander bezogen sind, jedoch in der Art, dass jedem der Punkte Y und Y_1 eine nicht durch den anderen gehende Ebene η_1^2 oder η^2 entspricht. Jeder Ebene des einen Raumes entspricht im Allgemeinen eine Fläche II. Ordnung in dem anderen, und alle diese Flächen II. Ordnung haben einen Kegelschnitt (η^2 oder η_1^2), und ausserdem einen Punkt (Y oder Y_1) mit einander gemein. Ueberhaupt ist die Beziehung von Σ zu Σ_1 ganz dieselbe wie diejenige von Σ_1 zu Σ, was von den übrigen Fällen des F^2-Gebüsches keineswegs gilt. Wenn die collinearen Strahlenbündel Y und Y_1 projectivisch gleich sind und so auf einander gelegt werden, dass sie alle ihre Elemente entsprechend gemein haben, und wenn alsdann auch die Ebenen η und η_1 auf einander fallen, so liegen die Räume Σ und Σ_1 involutorisch. Sie bilden alsdann ganz dasselbe involutorische System, zu welchem wir in Nr. 108 und schon früher in Nr. 21 gelangt sind. Einer beliebigen Fläche II. Ordnung des einen Raumes entspricht also im anderen Raume eine Fläche vierter Ordnung, deren Haupt-Eigenschaften wir schon in Nr. 112 bis 115 erörtert haben. Bemerkenswerth ist noch, dass zwischen je zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1, deren Träger in den collinearen Bündeln Y und Y_1 einander entsprechen, eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades besteht.



ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.



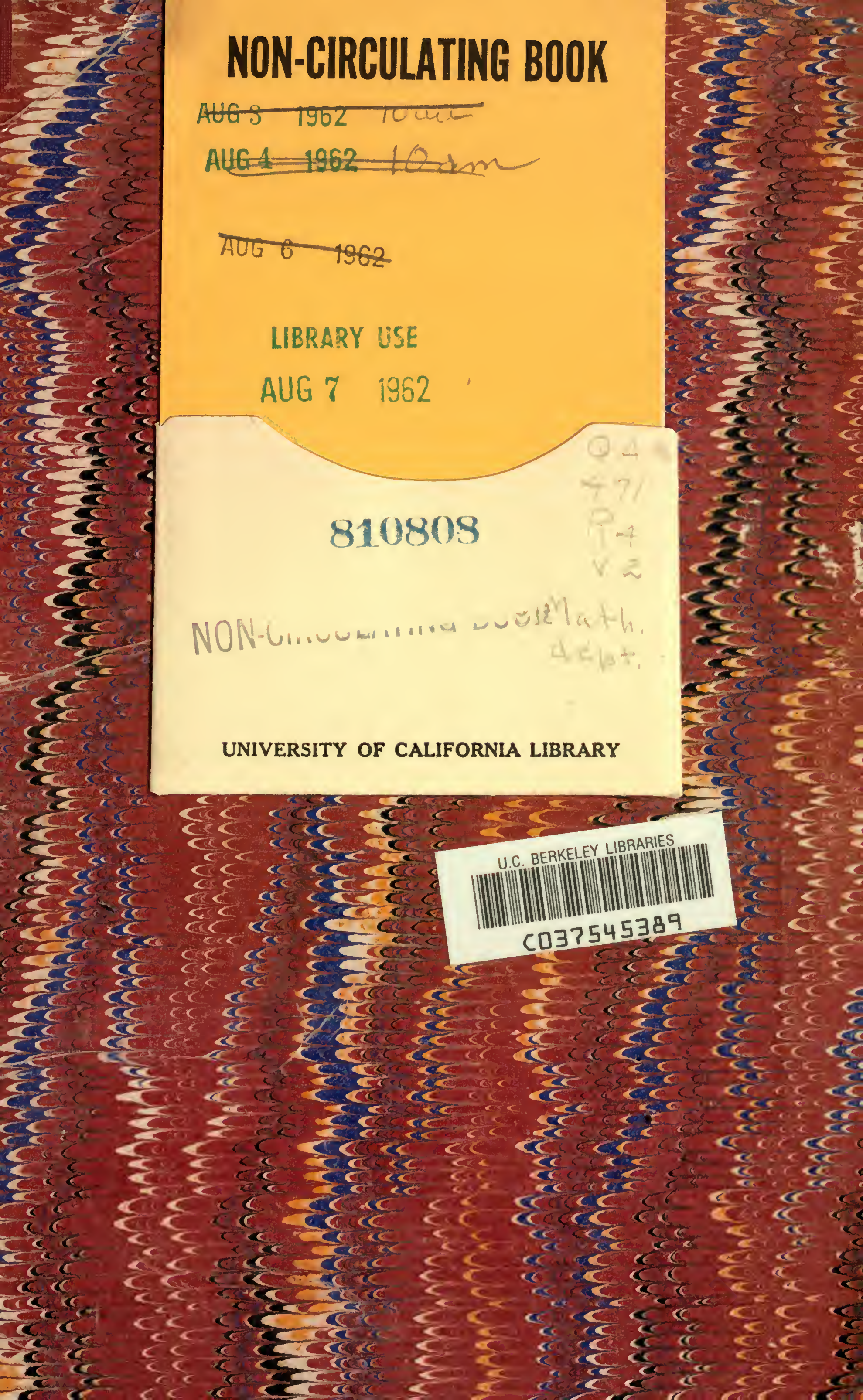











NON-CIRCULATING BOOK
AUG 3 1962
AUG 4 1962
AUG 6 1962
LIBRARY USE
AUG 7 1962
810808
NON-CIRCULATING BOOK
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545389

